



بخش آموزش رسانه تفریحی سنتر

کلیک کنید  www.tafrihicenter.ir/edu

 نمونه سوال  گام به گام

 امتحان نهایی  جزوه

 دانلود آزمون های آزمایشی

متوسطه اول : هفتم ... هشتم ... نهم

متوسطه دوم : دهم ... یازدهم ... دوازدهم

www.tafrihicenter.ir

تابع



فصل

- ۱ آشنایی بیشتر با تابع
- ۲ انواع توابع
- ۳ وارون تابع
- ۴ اعمال روی توابع



مفهوم تابع در ریاضیات و علوم مختلف دارای کاربردهای فراوانی است. تابع در دنیای واقعی برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌طور نمونه قد متوسط کودکان را می‌توان به‌صورت یک تابع رادیکالی مانند $f(x) = \sqrt{x} + 50$ نمایش داد.

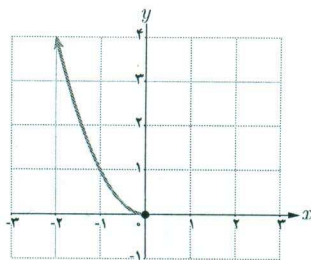
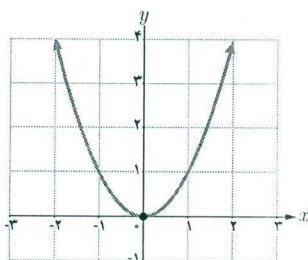
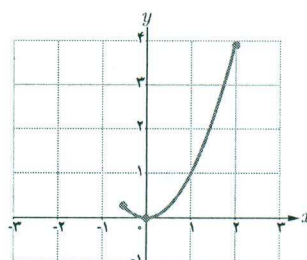
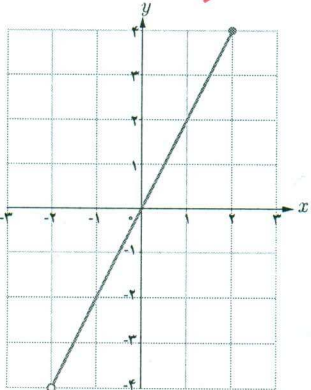
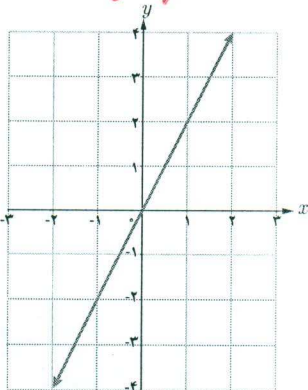
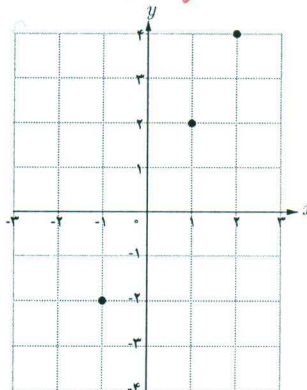
آشنایی بیشتر با تابع

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B ، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A ، دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود. A را دامنه تابع و B را هم دامنه تابع می‌نامند. برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم دامنه است.

کارد در کلاسی

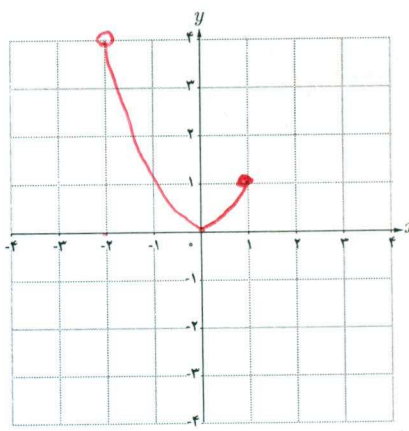
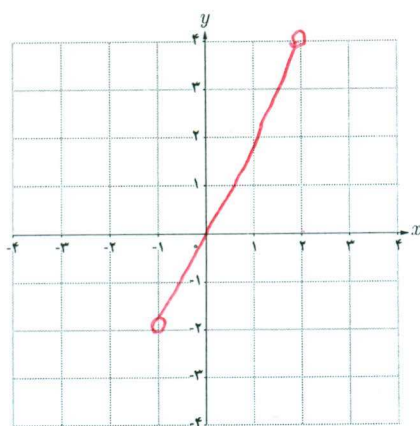
الف) با توجه به توابع داده شده در جدول زیر، مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است و جدول را نیز کامل کنید. شباهت‌ها و تفاوت‌های نمودارها را با هم مقایسه کنید.

تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = 2x$	$h(x) = 2x$	$t(x) = x^2$	$s(x) = x^2$	$k(x) = x^2$
دامنه تابع	$\mathbb{R}$	$\{-1, 1, 2\}$	$(-2, 2]$	$\mathbb{R}$	$(-\infty, 0]$	$[-\frac{1}{4}, 2]$
برد تابع	$\mathbb{R}$	$\{-2, 2, 4\}$	$(-4, 4]$	$[0, \infty)$	$[0, \infty)$	$[0, 4]$

 $s(x)$  $t(x)$  $k(x)$  $h(x)$  $f(x)$  $g(x)$

تابع	$f(x) = 2x$	$g(x) = x^2$
دامنه	$(-1, 2)$	$(-2, 1]$
برده	$(-2, 4)$	$(\frac{1}{4}, 1]$

ب) جدول روبه‌رو را به دلخواه (متفاوت از قسمت الف) کامل و نمودار هر تابع را رسم کنید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. چند پاسخ متفاوت برای f و g می‌توان ارائه کرد؟ **جواب: چهار**



برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه، هم‌دامنه و دستور یا قاعده‌ای که نحوه ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد معلوم باشند.

به‌طور مثال تابع f در قسمت الف کار در کلاس قبل، تابعی است با دامنه $\mathbb{R}$ و هم‌دامنه $\mathbb{R}$ و ضابطه آن نیز $f(x) = 2x$ است. برای سادگی و اختصار این تابع را به‌صورت مقابل نمایش می‌دهند:

$$(f \text{ تابعی از } \mathbb{R} \text{ به } \mathbb{R} \text{ است.}) \quad \begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 2x \end{cases}$$

$$\begin{cases} h: (-2, 2] \rightarrow (-4, 4] \\ h(x) = 2x \end{cases} \quad \text{به همین ترتیب تابع } h \text{ قسمت الف را می‌توان چنین نمایش داد.}$$

$$\begin{cases} h: (-2, 2] \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = 2x \end{cases} \quad \text{تابع } h \text{ را به‌صورت مقابل هم می‌توان معرفی کرد.}$$

در هر دو نمایش اخیر تابع h ، دامنه مجموعه $(-2, 2]$ و ضابطه آن $h(x) = 2x$ است. در نمایش اول هم‌دامنه $(-4, 4]$ است که همان برد تابع است. در نمایش دوم h ، هم‌دامنه را $\mathbb{R}$ در نظر گرفته‌ایم. در این حالت نیز برد تابع $(-4, 4]$ است.

هم‌دامنه تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

برای تابع $f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow [0, \infty)$ کدام یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟ **بیروت**

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

(الف) ✗

$$\begin{cases} f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow [0, \frac{1}{9}] \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

✓ (ب)

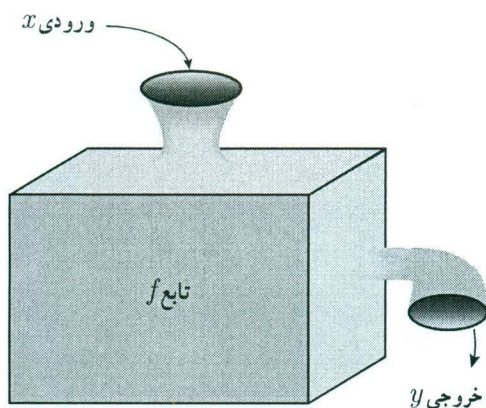
$$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \frac{1}{9}] \\ f(x) = x \end{cases}$$

✗ (پ)

$$\begin{cases} f: [0, \frac{1}{3}] \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = x^2 \end{cases}$$

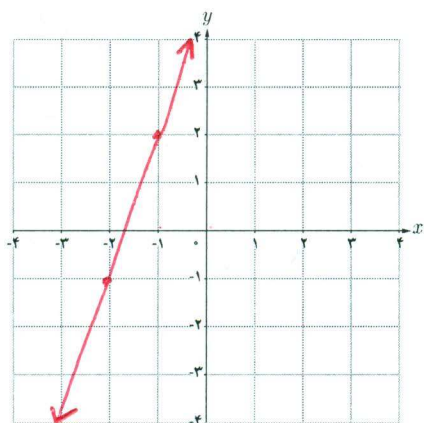
✓ (ت)

تابع به عنوان یک ماشین



می‌توان تابع را همچون ماشینی در نظر گرفت که یک ورودی را دریافت می‌کند و در ازای آن یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنه داده می‌شوند و خروجی‌ها به برد تعلق دارند و برای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد (البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسانی داشته باشند). اگر x عنصری دلخواه از دامنه f و y نمایش خروجی نظیر آن باشد، x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می‌نامند.

در این صورت می‌نویسیم: $y = f(x)$



فرض کنید ماشین f به عنوان ورودی، اعداد (حقیقی) را قبول می‌کند و پس از دریافت هر عدد، آن را سه برابر و سپس ۵ واحد به آن اضافه می‌کند. در این صورت به ازای ورودی ۱۰، خروجی ۳۵ را می‌دهد. به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف) ماشین به ازای ورودی -۲، چه خروجی خواهد داشت؟ -۱

ب) اگر خروجی ماشین ۴ باشد ورودی آن چقدر بوده است؟
 پ) نمایش تابع به صورت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ است.
 $f(x) = 3x + 5$

ت) نمودار تابع را رسم و دامنه و برد آن را معلوم کنید.

$D = \mathbb{R}$ $R: \text{بر}$

تساوی دو تابع

اگر نمودارهای دو تابع در یک دستگاه مختصات داده شده باشند، هنگامی این دو تابع باهم برابرند که نمودارهای آنها کاملاً برهم منطبق شوند. به طور مثال هیچ کدام از توابع داده شده در قسمت الف کار در کلاس صفحه ۳۸ با یکدیگر برابر نیستند. اگر دو تابع به صورت مجموعه زوج‌های مرتب داده شده باشند، هنگامی باهم برابرند که به عنوان دو مجموعه باهم برابر باشند.

دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه:

الف) دامنه f و دامنه g باهم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x) = g(x)$

❖ مثال: تابع‌های $f(x) = \sqrt{x^2}$ و $g(x) = |x|$ باهم برابرند ولی تابع‌های $f(x) = \frac{x}{x}$ و $g(x) = 1$ برابر نیستند. چرا؟
 $D_f \neq D_g$
 $D_g = \mathbb{R}$
 $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$

کاردر کلاس

۱ در جدول زیر کدام یک از توابع داده شده زیر باهم برابرند؟ دلیل بیاورید:

۱	$f = \{(1, 2), (5, 7)\}$	$g = \{(1, 7), (5, 2)\} \rightarrow f(1) \neq g(1) \leftarrow \text{آیا } D_f = D_g$
۲	$f = \{(a, b), (c, d)\}$	$g = \{(c, d), (a, b)\} \rightarrow f \text{ و } g \text{ برابرند}$
۳	$\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = 3x \end{cases}$	$\begin{cases} g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 3x \end{cases} \rightarrow D_f \neq D_g$
۴	$f(x) = x x $	$g(x) = x^2 \rightarrow f(-1) \neq g(-1) \leftarrow \text{آیا } D_f = D_g$
۵	$f(x) = 4x$	$g(x) = \frac{4x}{2} \rightarrow f \text{ و } g \text{ برابرند}$

۲ وقتی در آسمان پدیده آذرخش رخ می‌دهد، اندکی پس از دیدن نور آن صدای آن را نیز می‌شنویم. صدای ناشی از آذرخش هر ۳ ثانیه حدود یک کیلومتر را طی می‌کند. رابطه بین فاصله ما از مکان وقوع آذرخش و زمانی که طول می‌کشد تا صدای آن را بشنویم در جدول زیر (برای برخی زمان‌ها) داده شده است، اگر $t \in [4, 12]$:

الف) جدول را کامل کنید:

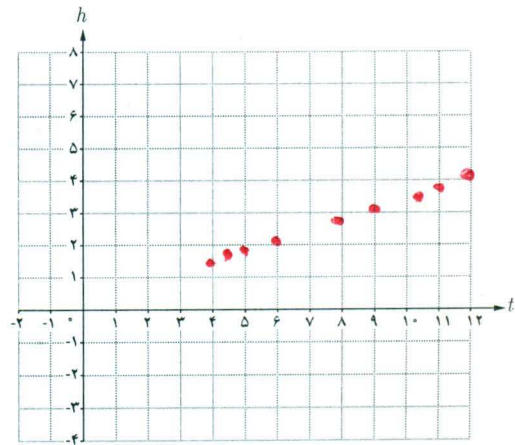
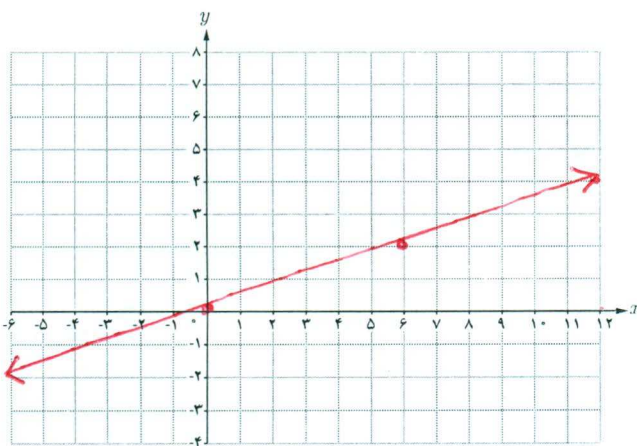
t (ثانیه)	۴	$4\frac{1}{2}$	۵	۶	۸	۹	$10\frac{1}{5}$	۱۱	۱۲
h (کیلومتر)	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	۲	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{3}$	$\frac{51 \div 3}{15 \div 3} = \frac{17}{5}$	$\frac{11}{3}$	۴

ب) چرا h تابعی از t است؟ برای هر زمان t فقط یک مقدار h وجود دارد.
پ) دامنه و برد این تابع را بنویسید.

ت) نمایش مقابل از تابع h کامل کنید:

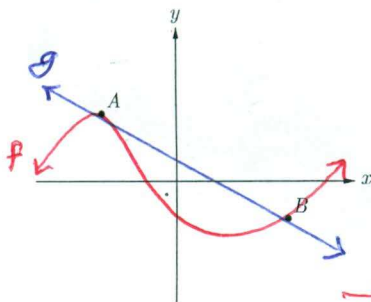
$$\begin{cases} h: [4, 12] \rightarrow [\frac{4}{3}, 4] \\ h(t) = \frac{1}{3}t \end{cases}$$

ث) نمودار تابع h و نمودار تابع $y = \frac{1}{3}x$ را رسم کنید و شباهت‌ها و تفاوت‌های آنها را بیان کنید.
 $D_h \neq D_y$



تمرین

۱ در صفحه مختصات روبه‌رو تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟ بی‌شمار



۲ کدام یک از موارد زیر درست و کدام یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

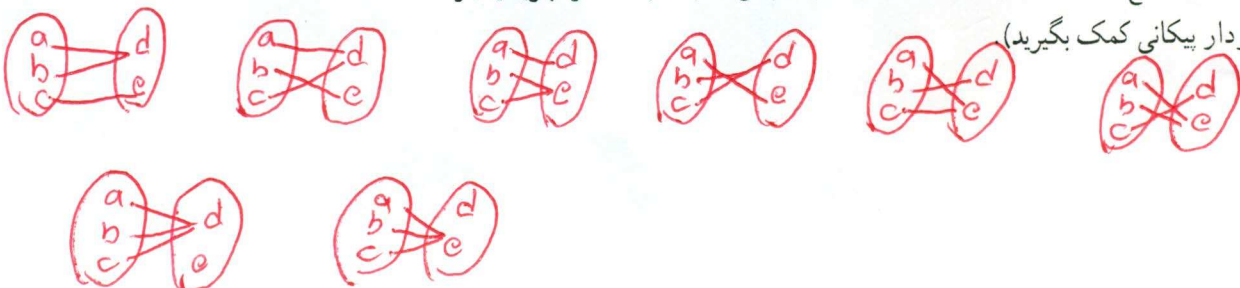
- الف) اگر دامنه دو تابع با هم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند. ✗
- ب) برد و هم‌دامنه تابع می‌توانند یکی باشند. ✓
- پ) هم‌دامنه تابع زیر مجموعه‌ای از برد آن است. ✗
- ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنه آن بازه $[0, 3]$ است. ✓

۳ تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این

توابع وجود دارند؟ بی‌شمار $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

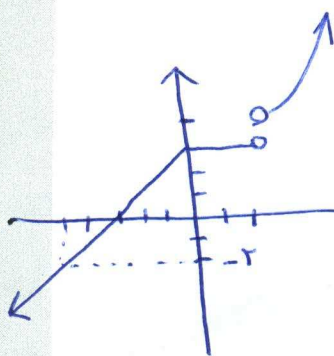
۴ همه تابع‌های از مجموعه $A = \{a, b, c\}$ به مجموعه $B = \{d, e\}$ را بنویسید (از

نمودار پیکانی کمک بگیرید)



۵ تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

$$\begin{aligned} &\begin{cases} f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = |x| \end{cases} & \begin{cases} r: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ r(a) = 5a \end{cases} \\ &\begin{cases} g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = 5x \end{cases} & \begin{cases} s: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ s(a) = 5a \end{cases} \\ &\begin{cases} h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases} \end{cases} & \begin{cases} t: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ t(x) = 5x \end{cases} \end{aligned}$$



۶ تابع f در همه شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنه f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$ و $f(x) = \begin{cases} x^2 & x > 2 \\ 3 & 0 \leq x \leq 2 \\ x+3 & x < 0 \end{cases}$

ب) f در بازه $[0, 2]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور x ها را در نقطه‌ای به طول ۳- قطع می‌کند.

۷ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می‌توان طول قد یک انسان بزرگ سال را برآورد کرد:

$$m(۳۵) = ۲۸ \times ۳۵ + ۷۰/۴۴ = ۱۷۱/۷۹ \text{ (الف)}$$

$$۱۸۵ = ۲۸x + ۷۰/۴۴ \quad \text{ب)}$$

$$x = \frac{۱۸۵ - ۷۰/۴۴}{۲۸} = \frac{۱۱۴/۳۹}{۲۸} \approx ۳۹/۱۵۷ \text{ cm}$$

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟



خواندنی

نتایج یک مطالعه در مورد قد مردان و زنان از سال ۱۹۱۴ تا ۲۰۱۴ نشان می‌دهد که میانگین قد مردان ایرانی در طی این صد سال از ۱۵۷/۱ به ۱۷۳/۶ سانتی‌متر و میانگین قد زنان ایرانی از ۱۴۸/۵ به ۱۵۹/۷ سانتی‌متر رسیده است. مردان ایرانی بیشترین افزایش طول قد در دنیا را در ۱۰۰ سال اخیر داشته‌اند.

شما تاکنون با توابع مختلفی آشنا شده‌اید. توابع در دنیای واقعی دارای کاربردهای زیادی هستند. تابع‌های ثابت، تابع‌های همانی، تابع‌های خطی و به‌طور کلی توابع چند جمله‌ای نمونه‌هایی از توابعی هستند که در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این درس با انواع دیگری از توابع مهم و مفید آشنا می‌شویم.

توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

توابع زیر همگی گویا هستند:

$$f(x) = \frac{5}{x+2}$$

$$g(x) = \frac{\frac{1}{3}x - 4}{x^2 - 7x + 1}$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{5}x + 2}{x^3 + 1}$$



خواندنی

توابع گویا در دنیای واقعی کاربردهای فراوانی دارند. به‌طور مثال میانگین تعداد وسایل نقلیه‌ای که در یک صف منتظر ورود به یک پارکینگ هستند از تابع گویای $f(x) = \frac{x^2}{2(1-x)}$ بدست می‌آید که در آن x شدت ترافیک و عددی بین صفر و یک است.

فرودگاه امام خمینی (ره)

مشخص کنید که هر نمودار زیر متناظر با کدام تابع است؟ دلیل بیاورید.

$$\left\{ \begin{array}{l} f \end{array} \right.$$

(الف)

$$\left\{ \begin{array}{l} g: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

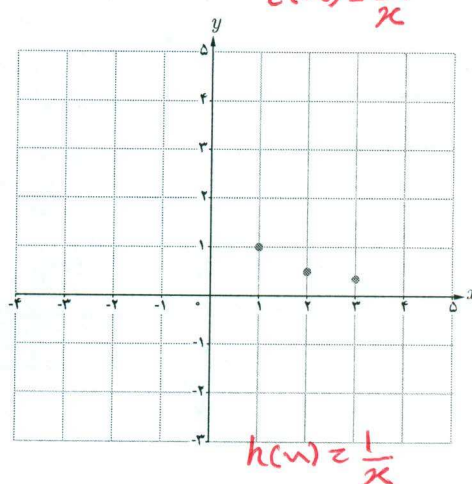
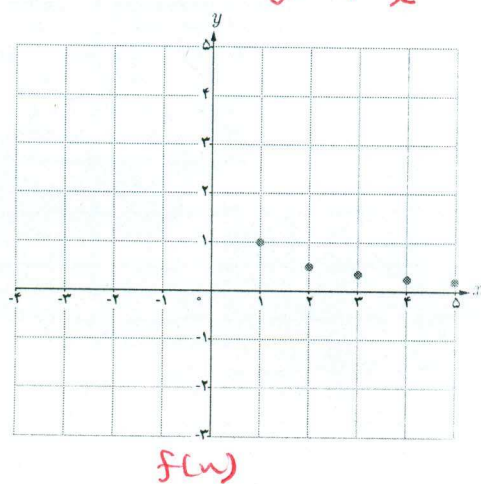
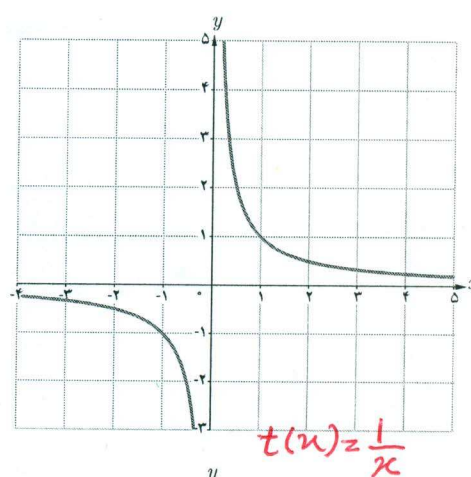
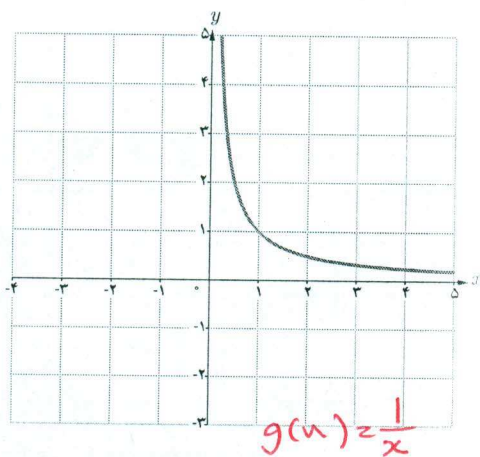
(ب)

$$\left\{ \begin{array}{l} h: \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R} \\ h(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

(پ)

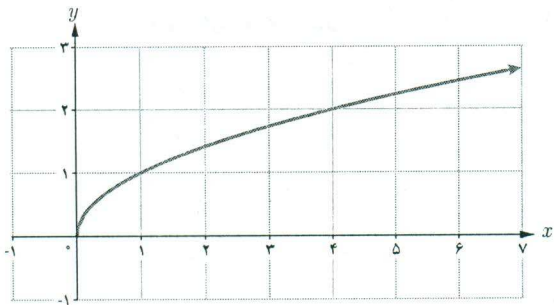
$$\left\{ \begin{array}{l} t: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R} \\ t(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right.$$

(ت)



دامنه تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ برابر $\mathbb{R} - \{0\}$ است، اما ممکن است دامنه را به مجموعه‌های دیگری محدود کنیم. دامنه f را با D_f نمایش می‌دهیم. دامنه یک تابع گویا مجموعه همه مقادیری است که به ازای آنها، عبارت جبری گویای نمایش دهنده ضابطه تابع، تعریف شده باشد؛ مثلاً دامنه تابع $f(x) = \frac{5}{x+2}$ مجموعه $\mathbb{R} - \{-2\}$ است.

توابع رادیکالی (تابع ریشه دوم)

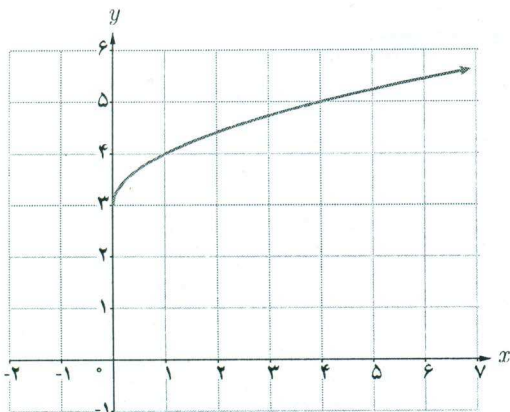


تابعی را که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد تابع ریشه دوم می‌نامند و به صورت $y = \sqrt{x}$ یا $f(x) = \sqrt{x}$ نمایش می‌دهند. نمودار تابع در شکل نشان داده شده است. دامنه و برد این تابع، بازه $[0, +\infty)$ است. تابع $f(x) = \sqrt{x}$ یک تابع رادیکالی است.

کارد در کلاس

به کمک نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ نمودار چهار تابع:

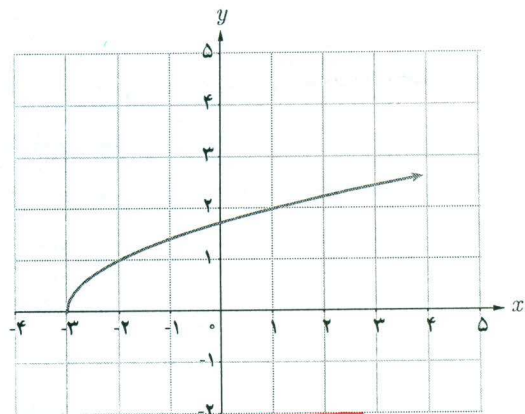
الف) $f(x) = \sqrt{x} + 3$ ، ب) $h(x) = \sqrt{x} - 3$ ، پ) $g(x) = \sqrt{x-3}$ ، ت) $r(x) = \sqrt{x+3}$ رسم شده‌اند. تابع مربوط به هر نمودار را مشخص و دامنه و برد آن را معلوم کنید.



$$f(x) = \sqrt{x} + 3$$

$$D = [0, \infty)$$

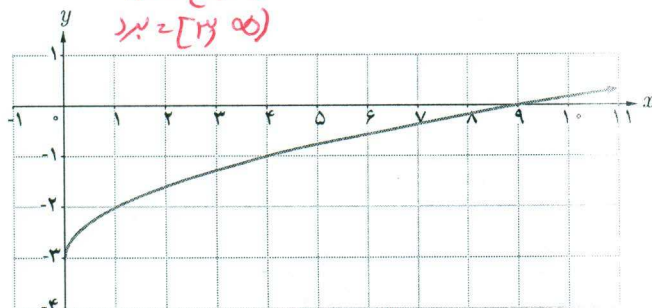
$$\text{بردار} = [3, \infty)$$



$$f(x) = \sqrt{x+3}$$

$$D = [-3, \infty)$$

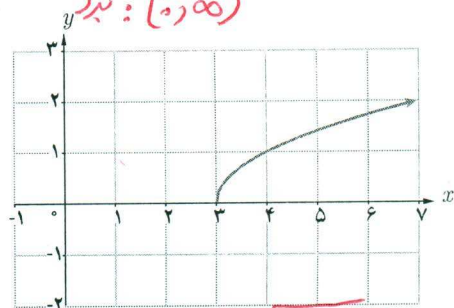
$$\text{بردار} = [0, \infty)$$



$$h(x) = \sqrt{x} - 3$$

$$D = [0, \infty)$$

$$\text{بردار} = [-3, \infty)$$

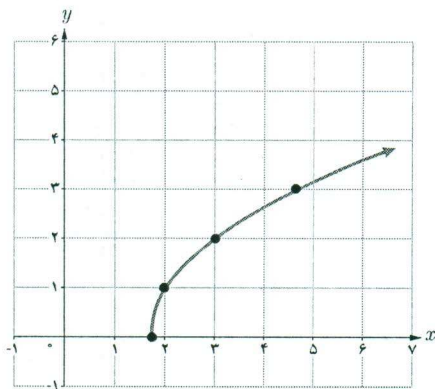


$$g(x) = \sqrt{x-3}$$

$$D = [3, \infty)$$

$$\text{بردار} = [0, \infty)$$

x	$\frac{5}{3}$	۲	۳	۴	$\frac{14}{3}$
$f(x)$	۰	۱	۲	$\sqrt{7}$	۳



مثال: دامنه تابع $f(x) = \sqrt{3x-5}$ برابر مجموعه همه اعدادی است که برای آنها $3x-5 \geq 0$ و یا $x \geq \frac{5}{3}$ پس: $D_f = [\frac{5}{3}, +\infty)$.

برد این تابع نیز مجموعه اعداد نامنفی است

یعنی: $R_f = [0, +\infty)$

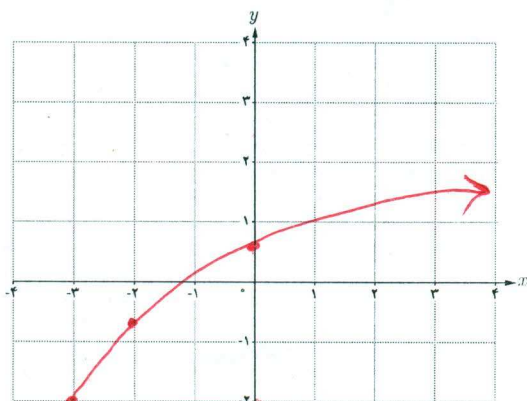
در جدول، مقادیر تابع f به ازای چند عدد در دامنه آن مشخص و نمودار تابع نیز در زیر جدول رسم شده است.

کارد کلاس

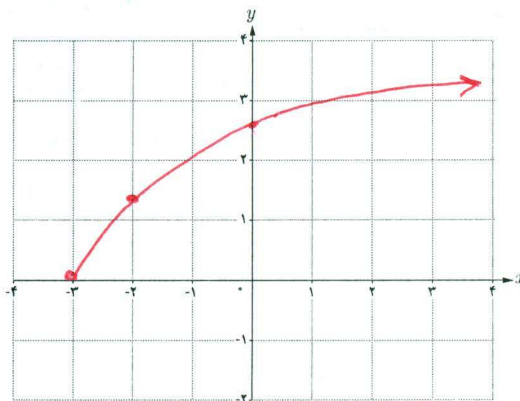
$$2x+4 \geq 0 \quad 2x \geq -4 \quad x \geq -2 \quad D_f = [-2, \infty)$$

الف) دامنه تابع $f(x) = \sqrt{2x+6}$ را به دست آورید. سپس به کمک نقطه یابی نمودار آن را رسم کرده و برد تابع را نیز معلوم کنید.

ب) نمودار تابع $g(x) = \sqrt{2x+6} - 2$ را به کمک انتقال رسم کنید.



الف: $D: [-3, \infty)$
ب: $D: [-2, \infty)$



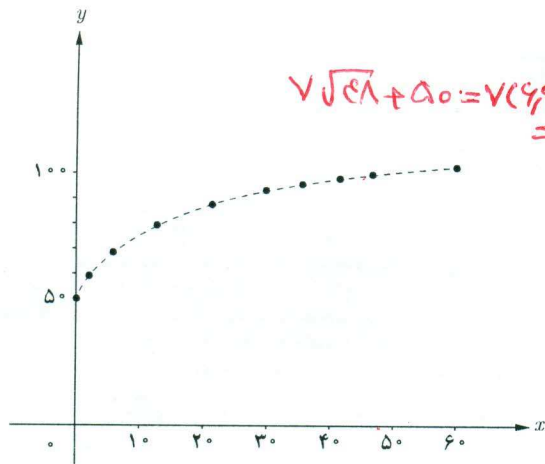
الف: $D: [-3, \infty)$
ب: $D: [-2, \infty)$

فعالیت

تابع $f(x) = \sqrt{x} + 50$ قد متوسط کودکان را، به تقریب، و بر حسب سانتی متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می دهد. x نشان دهنده ماه های پس از تولد است. در حالت کلی دامنه این تابع رادیکالی بازه $[0, \infty)$ است ولی در این مثال که واقعی است دامنه آن بازه $[0, 60]$ می باشد.

الف) جدول زیر را کامل کنید. در همین صفحه با استفاده از این جدول نمودار تقریبی f را رسم کرده ایم.

x	۰	۱	۴	۱۰	۱۶	۲۵	۳۰	۳۶	۴۹	۶۰
$f(x)$	۵۰	۵۷	۶۴	۷۲/۱	۷۸	۸۵	۸۸/۳	۹۲	۹۹	۱۰۴/۲



$(50, 50)$

ب) برد این تابع چیست؟

ب) قد یک کودک چهار ساله تقریباً چقدر است؟

ت) با استفاده از ضابطه تابع یا نمودار آن مشخص کنید

که کودکی با قد ۷۵ سانتی متر حدوداً چند ماهه است.

$$75 = \sqrt{x} + 50$$

$$25 = \sqrt{x}$$

$$\frac{25}{\sqrt{}} = \sqrt{x}$$

$$25\sqrt{25} = \sqrt{x} \quad x = 12,74$$

معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند x و y هستند یک رابطه را نشان می دهند؛ مثلاً معادله $x + y = 2$ شامل همه زوج های مرتبی است که مجموع مؤلفه های آنها برابر ۲ است. نمودار این معادله یک خط است. این معادله را به صورت $y = -x + 2$ یا $f(x) = -x + 2$ نیز نمایش می دهند. بسیاری از توابع با یک معادله بیان می شوند، اما الزاماً یک معادله با دو متغیر برحسب x و y یک تابع را مشخص نمی کند.

❖ مثال

الف) در معادله $-x^2 + y = 4$ ، y را برحسب x به دست آورید. آیا y تابعی از x است؟ $y = x^2 + 4$ بله

❖ حل: داریم $y = x^2 + 4$. این معادله یک سهمی را مشخص می کند که همان تابع $f(x) = x^2 + 4$ است.

ب) آیا در معادله $x - y^2 = 4$ ، y تابعی از x است؟

❖ حل: اگر y را برحسب x به دست آوریم داریم: $y = \pm\sqrt{x-4}$ به ازای $x = 5$ داریم: $y = \pm 1$. یعنی فقط نقاط $(5, 1)$ و

$(5, -1)$ روی نمودار تابع قرار دارند. بنابراین، این معادله یک تابع را نمایش نمی دهد.

کدام یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟ دلیل بیاورید.

الف) $y = |x| + 1$ **تابع هست**

ب) $x = |y| + 1$ **تابع نیست چون نقاط $(5, 4)$ و $(4, -5)$ هر دو در آن نمودار این تابع قرار دارند**

$x = 5 \rightarrow y = \pm 4$

تابع پله‌ای - تابع جزء صحیح

هزینه ارسال بسته‌های پستی به‌طور معمول تابعی از وزن آنهاست. هزینه توقف خودرو در یک پارکینگ نیز تابعی از زمان توقف است. در فعالیت زیر با نمونه‌ای از این توابع آشنا می‌شویم.

فعالیت

هزینه ارسال یک بسته پستی به مقصدی معین در جدول زیر داده شده است.

x (وزن بسته) کیلوگرم	$0 < x \leq 2$	$2 < x \leq 5$	$5 < x \leq 10$	$10 < x \leq 12$
$f(x)$ (هزینه ارسال) بر حسب هزار تومان	۵	۱۰	۱۷	۲۰

$$f(x) = \begin{cases} 5 & 0 < x \leq 2 \\ 10 & 2 < x \leq 5 \\ 17 & 5 < x \leq 10 \\ 20 & 10 < x \leq 12 \end{cases}$$

اگر حداکثر وزن بسته‌های ارسالی ۱۲ کیلوگرم باشد،

الف) ضابطه تابعی را که جدول فوق نشان می‌دهد بنویسید و دامنه و برد آن را به دست آورید:

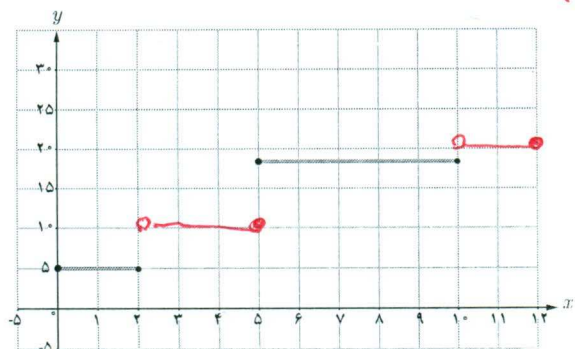
$D = (0, 12]$
 $\{5, 10, 17, 20\}$ برد

ب) برای ارسال دو بسته به وزن‌های ۹ کیلوگرم و

$11/5$ کیلوگرم چه هزینه‌ای باید پرداخت؟ $17 + 20 = 37$

ب) قسمتی از نمودار این تابع در شکل روبه‌رو رسم شده است. بقیه نمودار را رسم کنید.

توابعی مانند تابع فوق را که بتوان دامنه آنها را به تعدادی بازه تقسیم کرد به گونه‌ای که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد، تابع پله‌ای می‌نامند.

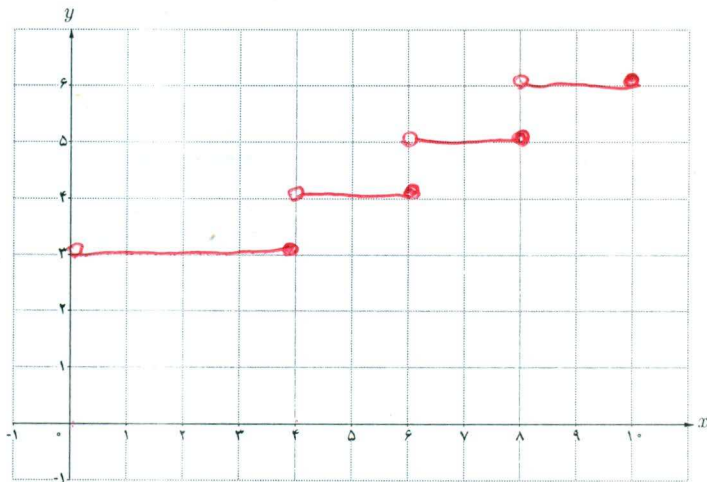


۱ پارکینگ یک مجتمع تفریحی - ورزشی برای چهار ساعت اول توقف یک خودرو ۳ هزار تومان و برای هر دو ساعت اضافه با زمانی کمتر از آن ۱۰۰۰ تومان دریافت می‌کند. اگر حداکثر مدت توقف در این پارکینگ ده ساعت باشد، نمودار تابعی را که هزینه توقف را به ازای همه ساعات ممکن نشان دهد رسم کنید. دامنه و برد تابع را نیز مشخص کنید.

$$f(x) = \begin{cases} 3 & 0 < x \leq 4 \\ 4 & 4 < x \leq 6 \\ 5 & 6 < x \leq 8 \\ 6 & 8 < x \leq 10 \end{cases}$$

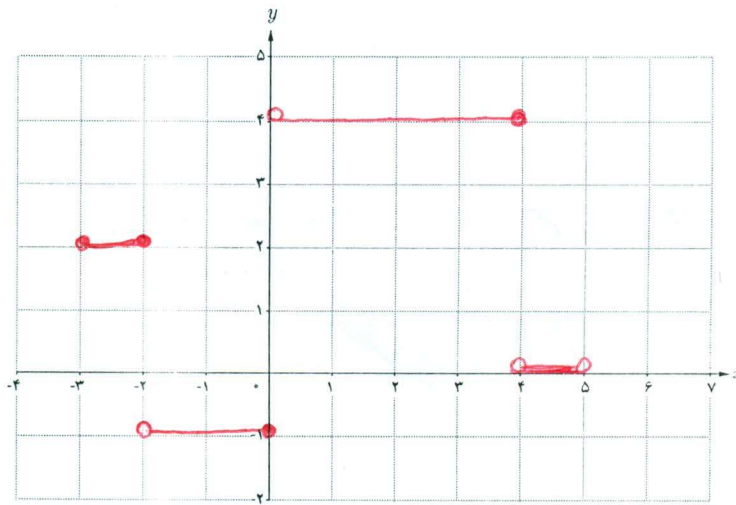
$$D = (0, 10]$$

$$\text{بر: } \{3, 4, 5, 6\}$$



۲ نمودار تابع پله‌ای زیر را رسم کنید:

$$f(x) = \begin{cases} 2 & -3 \leq x \leq -2 \\ -1 & -2 < x \leq 0 \\ 4 & 0 < x \leq 4 \\ 0 & 4 < x < 5 \end{cases}$$

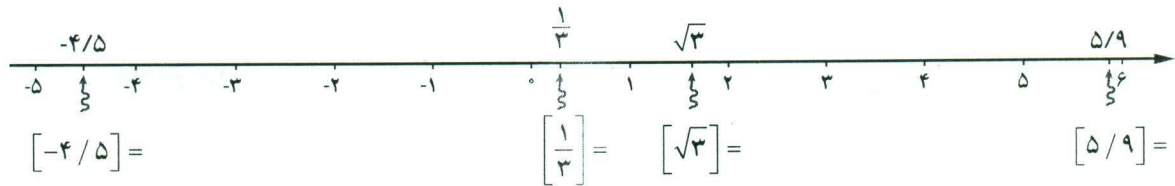


گونه خاصی از توابع پله‌ای که دارای کاربردهای زیادی نیز هست تابع جزء صحیح نام دارد. ابتدا با جزء صحیح یک عدد آشنا می‌شویم.

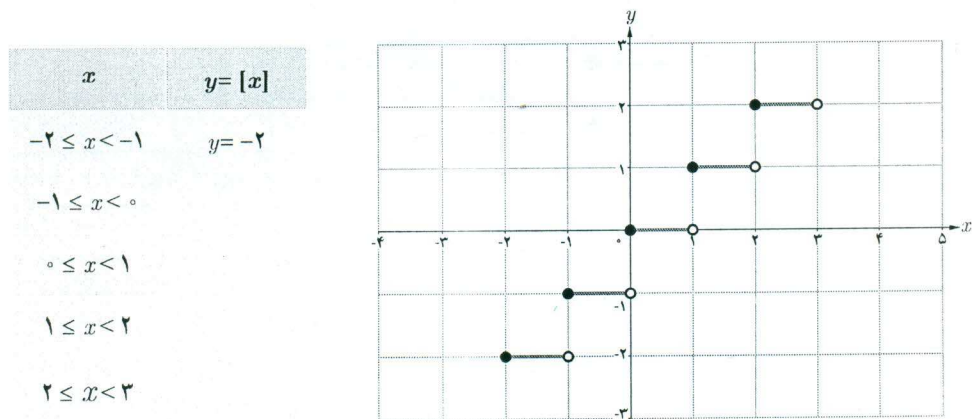
برای هر عدد حقیقی مانند x ، جزء صحیح آن بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم، به طور مثال $[-2/8] = -3$ و $[3/49] = 3$. مطابق با تعریف، جزء صحیح یک عدد همواره $x \leq [x]$. اگر x یک

فصل دوم: تابع ۵۱

عدد صحیح باشد $x = [x]$. جزء صحیح اعداد نشان داده شده روی محور را بیابید.



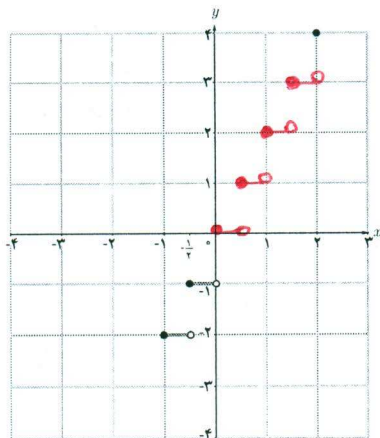
تابعی که به هر عدد حقیقی x ، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و آن را به صورت $f(x) = [x]$ نمایش می‌دهند. $D_f = \mathbb{R}$ و $R_f = \mathbb{Z}$. نمودار تابع با توجه به جدول در بازه $[-2, 3]$ رسم شده است.



کارد کلاس

نمودار تابع $f(x) = [2x]$ را در بازه $[-1, 2]$ رسم کنید (جدول و نمودار داده شده را کامل کنید).

$$-1 \leq x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq 2x \leq 4$$



$2x$	$-2 \leq 2x < -1$	$-1 \leq 2x < 0$			$2 \leq 2x < 3$	$3 \leq 2x < 4$
$[2x]$	-2	-1	0	1	2	3
x	$-1 \leq x < -\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2} \leq x < 0$			$\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} \leq x < 2$

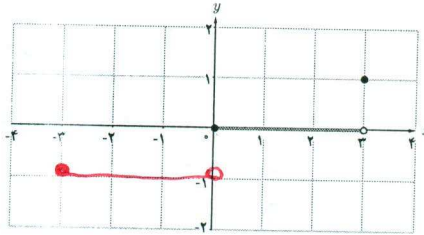
Handwritten red notes and arrows indicating the mapping of intervals for $2x$ to x :

- $0 \leq 2x < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < \frac{1}{2}$ (Note: This is likely a typo for $\frac{1}{2} \leq x < 1$)
- $1 \leq 2x < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} \leq x < 1$
- $2 \leq 2x < 3 \Rightarrow 1 \leq x < \frac{3}{2}$
- $3 \leq 2x < 4 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x < 2$

۱ نمودار تابع $f(x) = \left[\frac{1}{3}x\right]$ را در بازه $[-3, 3]$ رسم کنید (کامل کنید).

$$0 \leq \frac{1}{3}x < 1 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \left[\frac{1}{3}x\right] &= 0 \\ 0 \leq x < 3 \end{aligned} \right.$$

$$-1 \leq \frac{1}{3}x < 0 \Rightarrow \left\{ \begin{aligned} \left[\frac{1}{3}x\right] &= -1 \\ -3 \leq x < 0 \end{aligned} \right.$$



تمرین

۱ دامنه توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-x}$
 $D_f = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

ب) $f(x) = \frac{-3x}{x^2+1}$
 $D_f = \mathbb{R}$

پ) $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-12}$
 $D_f = \mathbb{R} - \{-5, 3\}$

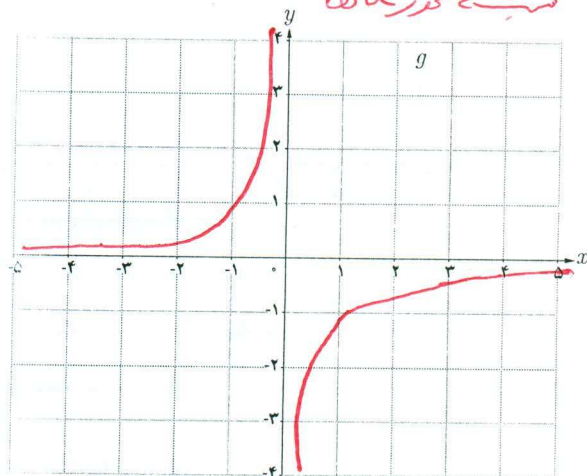
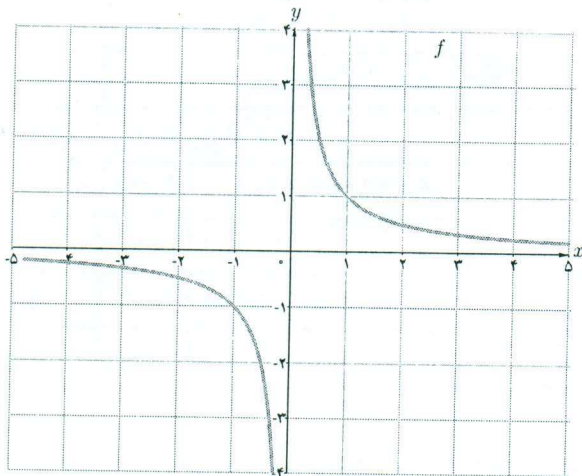
$$\begin{aligned} (x+5)(x-3) &= 0 \\ \begin{cases} x = -5 \\ x = 3 \end{cases} \end{aligned}$$

ت) $f(x) = \sqrt{3x+1}$
 $3x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3}$
 $D_f = [-\frac{1}{3}, \infty)$

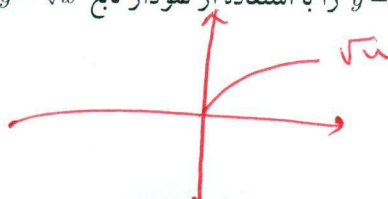
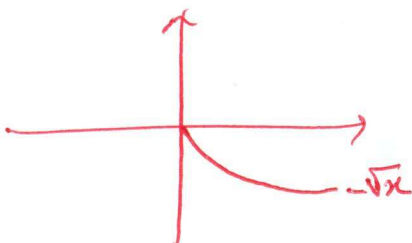
ث) $f(x) = 2\sqrt{x} - 3$
 $D_f = [0, \infty)$

ج) $f(x) = \sqrt{8-x}$
 $D_f = (-\infty, 8]$

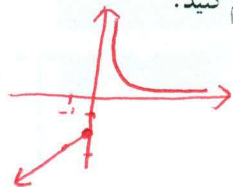
۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x) = \frac{1}{x}$ می توان نمودار تابع $g(x) = -\frac{1}{x}$ را رسم کرد.
 نمودار g از قرینه کردن نمودار f نسبت به محور x ها بدست می آید چون مقادیر تابع در نمودار g قرینه هستند نسبت به محور x ها.



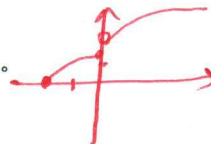
۳ نمودار تابع $y = -\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم کنید.



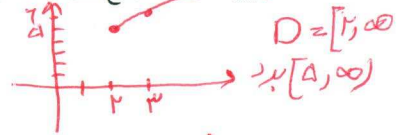
$D=R$
الف) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ x-2 & x \leq 0 \end{cases}$
برد $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$



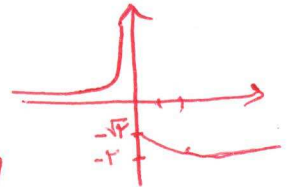
ب) $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} & x > 0 \\ \sqrt{x+2} & -2 \leq x \leq 0 \end{cases}$
 $D = [-2, \infty)$
برد $[0, \infty)$



ب) $f(x) = \sqrt{x-2} + 5$



ت) $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x < 0 \\ -\sqrt{x+2} & x \geq 0 \end{cases}$
 $D=R$
برد $(-\infty, -1] \cup (0, \infty)$



۵ کدام یک از معادلات زیر y را به صورت تابعی از x مشخص می کند؟

الف) $3x+2y=12$ $\checkmark$ تابع
ب) $x=1$ $\times$ تابع
پ) $y=-2$ $\checkmark$ تابع

ت) $f(x) = \begin{cases} x+3 & x \leq 0 \\ x-1 & x \geq 0 \end{cases}$
 $\times$ تابع
ث) $y=x^2$ $\times$ تابع
ج) $y=|x|$ $\times$ تابع



۶ هزینه پاک سازی x درصد از آلودگی های شهری و صنعتی از رودخانه ای، به وسیله تابع $f(x) = \frac{255x}{100-x}$ محاسبه می شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک سازی برحسب میلیون تومان است.
الف) هزینه پاک سازی ۵۰٪ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟
ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.
ج) $(-\infty, 100)$
د) $100 < x < 100$

$\frac{255 \times 50}{100-50} = 255$ میلیون

۷ نمودار تابع های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x) = [x] + 1$, $-2 \leq x < 3$

ب) $f(x) = [\frac{1}{x}]$, $-4 \leq x < 4$

۸ نمودارهای دو تابع $y = [x-3]$ و $y = [x]-3$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه ای بین این دو تابع وجود دارد؟

۹ اگر تعداد افرادی که طی یک مدت معین، به وسیله یک نوع ویروس آلوده می شوند با دستور $n(t) = \frac{9500t - 2000}{4+t}$ به دست آید که در آن $t > 0$ زمان برحسب ماه است:

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده اند چقدر است؟
ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

$$f(u) = [u] + 1 \quad -2 \leq u < 3$$

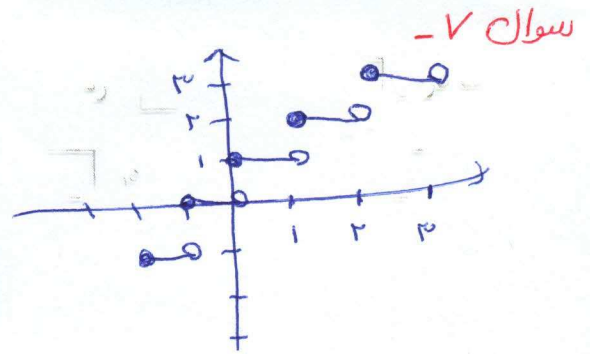
$$-2 \leq u < -1 \rightarrow [u] = -2 \rightarrow y = -1$$

$$-1 \leq u < 0 \rightarrow [u] = -1 \rightarrow y = 0$$

$$0 \leq u < 1 \rightarrow [u] = 0 \rightarrow y = 1$$

$$1 \leq u < 2 \rightarrow [u] = 1 \rightarrow y = 2$$

$$2 \leq u < 3 \rightarrow [u] = 2 \rightarrow y = 3$$



$$f(u) = \left[\frac{1}{7}u \right] \quad -8 \leq u < 8$$

$$-8 \leq u < -7$$

$$-7 \leq \frac{1}{7}u < -1 \rightarrow f(u) = -7$$

$$-7 \leq u < -6$$

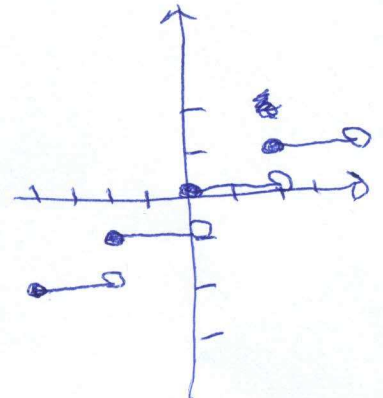
$$-6 \leq \frac{1}{7}u < -5 \rightarrow f(u) = -6$$

$$-6 \leq u < -5$$

$$-5 \leq \frac{1}{7}u < -4 \rightarrow f(u) = -5$$

$$-5 \leq u < -4$$

$$-4 \leq \frac{1}{7}u < -3 \rightarrow f(u) = -4$$



$$y = [u] - 3$$

$$-2 \leq u < -1 \rightarrow y = -4$$

$$-1 \leq u < 0 \rightarrow y = -5$$

$$0 \leq u < 1 \rightarrow y = -6$$

$$1 \leq u < 2 \rightarrow y = -7$$

$$y = [u - 3]$$

$$y = -4$$

$$-4 \leq u - 3 < -3$$

$$y = -5$$

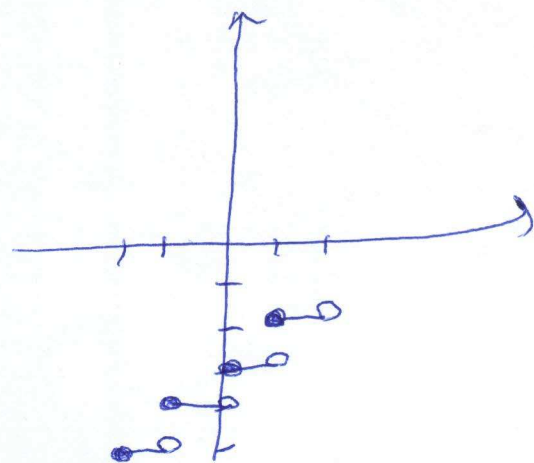
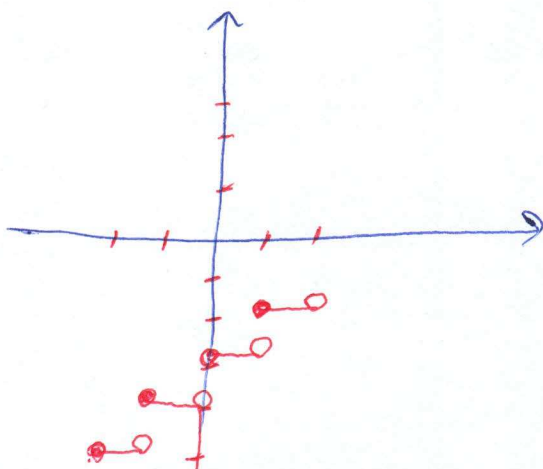
$$-3 \leq u - 3 < -2$$

$$y = -6$$

$$-2 \leq u - 3 < -1$$

$$y = -7$$

$$-1 \leq u - 3 < 0$$



هر دو تابع نمودار یکسانی دارند

$$N(a) = \frac{95000 \times a - 2000}{4 + a} = \frac{95000 - 2000}{9} = \frac{93000}{9} = 10333 \text{ نفر}$$

سوال ۹ - الف)

$$5500 = \frac{95000t - 2000}{4 + t} \rightarrow 22000 + 5500t = 95000t - 2000$$

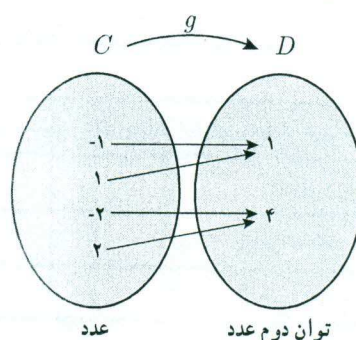
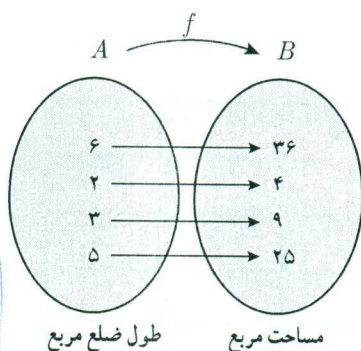
$$20000 = 90000t$$

$$t = 0.22$$

وارون توابع

فعالیت

دو تابع f و g را در نظر بگیرید:



الف) f و g را به صورت زوج‌های مرتب نمایش دهید و دامنه و برد هر یک را بنویسید.

$$f = \{(1, 36), (2, 4), (3, 9), (4, 25), (5, 9)\}$$

$$g = \{(-1, 1), (1, 4), (-2, 1), (2, 4)\}$$

$$D_f = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$D_g = \{-1, 1, -2, 2\}$$

$$R_f = \{36, 4, 9, 25\}$$

$$R_g = \{1, 4\}$$

ب) اگر جای دو مؤلفه هر زوج مرتب در f و g را عوض کنیم، روابط جدیدی به دست می‌آید. آنها را به ترتیب

h و k بنامید. h و k را وارون رابطه‌های f و g می‌نامیم. h و k را به صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید.

$$h = \{(36, 1), (4, 2), (9, 3), (25, 4), (9, 5)\}$$

$$k = \{(1, -1), (1, 2), (4, -2), (4, 2)\}$$

کدام یک از رابطه‌های h و k تابع است؟ دلیل بیاورید. h تابع دوی تابع نیست معکوس رابطه‌ای که تابع

اگر رابطه بین دو مجموعه به صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، رابطه‌ای را که از جابه‌جایی دو مؤلفه هر زوج مرتب رابطه به دست می‌آید وارون آن رابطه می‌نامیم.

اگر f یک تابع باشد وارون آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in f\}$$

اگر f^{-1} تابع باشد آن گاه f را وارون پذیر (معکوس پذیر) و f^{-1} را «تابع وارون» f می‌نامیم.

توجه کنید که f^{-1} را نباید با $\frac{1}{f}$ اشتباه گرفت.

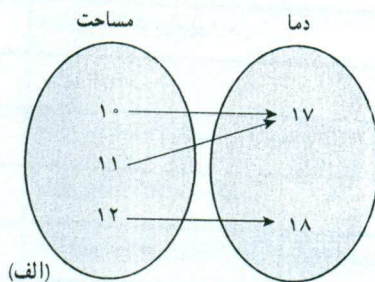
می‌بایست که هر دو طرف رابطه معکوس
هم‌رنگ شوند و هر دو طرف
نیز یک خطی‌کنند و در
هم از برد متعلق به چپ
از دامنه نباشد

توابع یک به یک

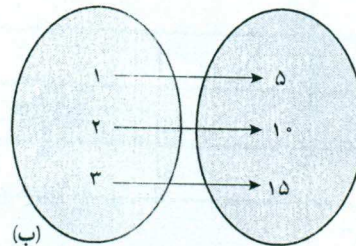
چه توابعی وارون پذیرند؟ در فعالیت قبل تابع f وارون پذیر بود ولی تابع g وارون پذیر نبود. بنابراین سؤال اساسی این است که یک تابع باید چه شرطی داشته باشد تا وارون پذیر باشد؟ *همه توابعی که در هر گاه هر عنصر از دامنه فقط یک عنصر از دامنه نظیر شده باشد*

فعالیت

توابع زیر را در نظر بگیرید:

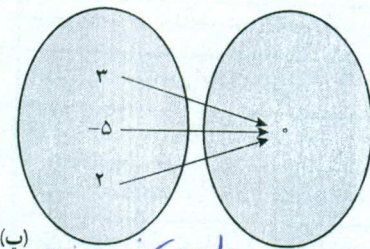


وارون پذیر نیست

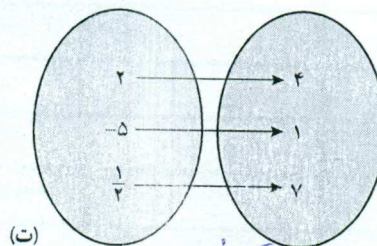


وارون پذیر

(الف) کدام یک از آنها وارون پذیرند؟



وارون پذیر نیست

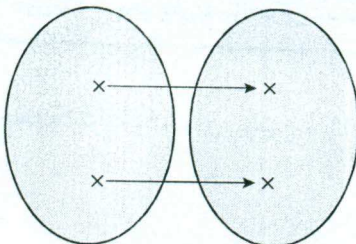


وارون پذیر

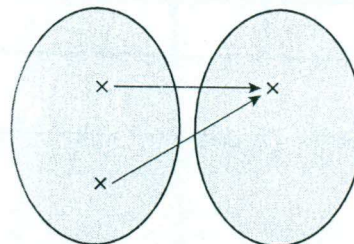
(ب) ویژگی مشترک توابع وارون پذیر چیست؟

اگر f یک تابع باشد و به هر عنصر در برد دقیقاً یک عنصر از دامنه نظیر شود تابع وارون پذیر است. اگر تابعی چنین ویژگی داشته باشد آن را یک به یک نامیم. به عبارت دیگر تابع f یک به یک است هرگاه هر دو عنصر متمایز در دامنه، به دو عنصر متمایز در برد نظیر شوند.

همان گونه که در فعالیت بالا دیده شد، اگر تابعی یک به یک باشد آن گاه وارون پذیر است.



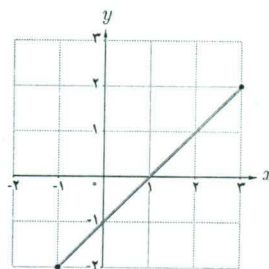
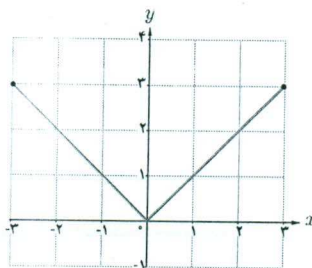
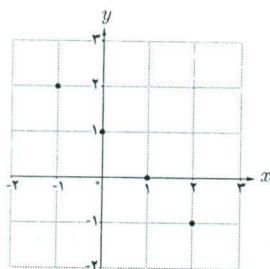
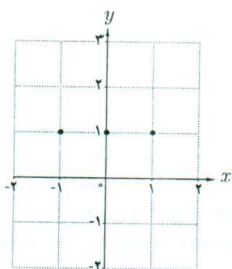
تابع یک به یک است.



تابع یک به یک نیست.

فعالیت

توابع داده شده در (الف) و (پ) یک به یک هستند ولی توابع داده شده در (ب) و (ت) یک به یک نیستند. چرا؟ توضیح دهید.



توابع (الف) و (پ) یک به یک هستند زیرا هر دو یک خط مستقیم هستند و هر دو از مبدأ می‌گذرند.

توابع (ب) و (ت) یک به یک نیستند زیرا (ب) یک خط مستقیم است و (ت) یک خط عمودی است.

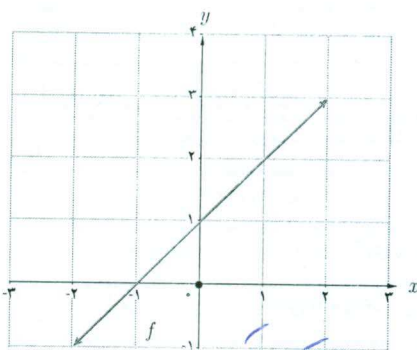
توابع (ب) و (ت) یک به یک نیستند زیرا (ب) یک خط مستقیم است و (ت) یک خط عمودی است.

توابع (ب) و (ت) یک به یک نیستند زیرا (ب) یک خط مستقیم است و (ت) یک خط عمودی است.

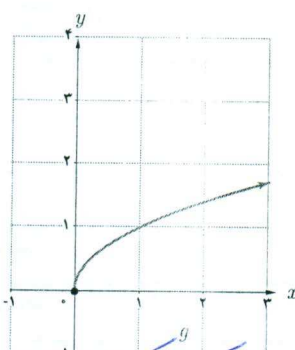
به طور کلی می‌توان گفت که یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور x ها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

کاردر کلاس

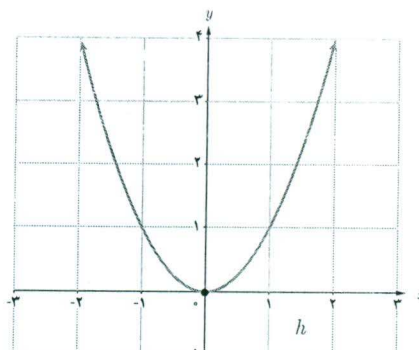
۱ کدام یک از توابع زیر یک به یک هستند؟



$$k = \{(1, 2), (3, 4), (8, 9)\}$$



$$l = \{(3, 7), (2, 5), (1, 5)\}$$



۲ فرض کنید به هر یک از اعضای یک کلاس کد ملی آنها را نسبت دهیم. توضیح دهید که چگونه رابطه بین افراد و کد ملی آنها تابعی یک به یک را معلوم می‌کند. چون کدهای اعضا یک به یک هستند و هر کد ملی فقط به یک نفر می‌رسد.

نکته ← وارون تابع ممکن است تابع باشد یا نباشد و می‌تواند وارون هم‌تابع باشد

کارد کلاس

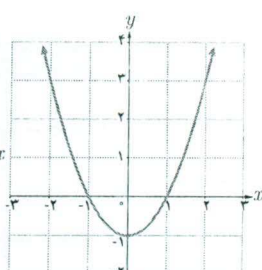
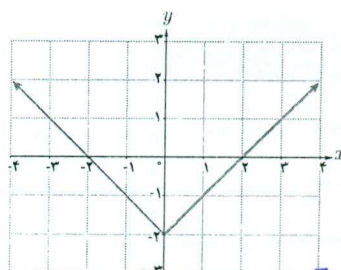
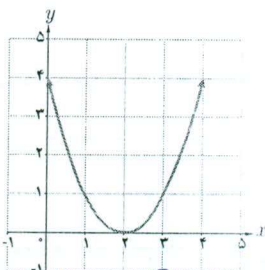
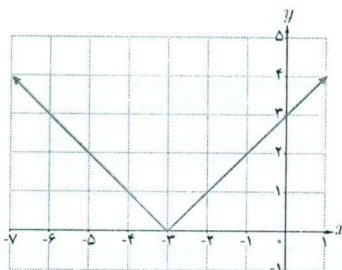
تابع‌های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y = |x+3|$

ب) $y = (x-2)^2$

پ) $y = |x|-2$

ت) $y = x^2 - 1$



دامنه محدود
 $D = (-\infty, 3]$
 یا
 $D = [3, \infty)$

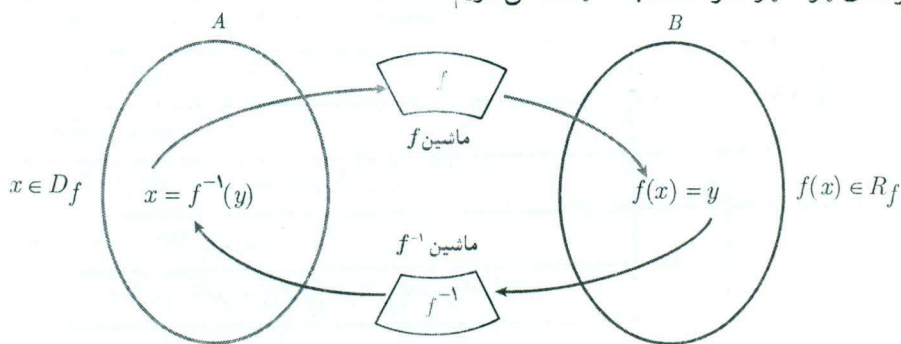
دامنه محدود
 $D = (-\infty, 2]$
 یا
 $D = [2, \infty)$

محاسبه وارون یک تابع

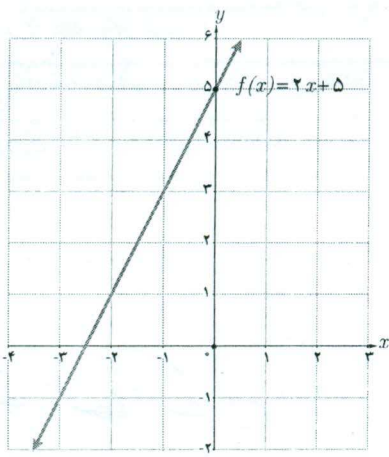
دامنه محدود
 $D = [0, \infty)$ یا $D = (-\infty, 0]$

دامنه محدود
 $D = [0, \infty)$ یا $D = (-\infty, 0]$

اگر f تابعی یک به یک باشد و f^{-1} تابع وارون آن باشد، نمودار زیر کارکرد f و f^{-1} را نشان می‌دهد. در فعالیت بعد به صورت جزئی‌تر با کارکردهای f و f^{-1} و نحوه محاسبه f^{-1} آشنا می‌شویم.



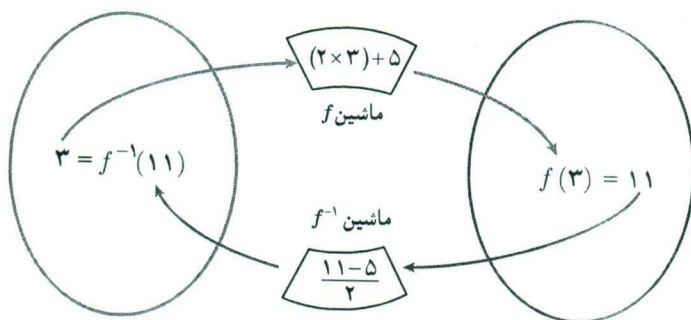
فعالیت



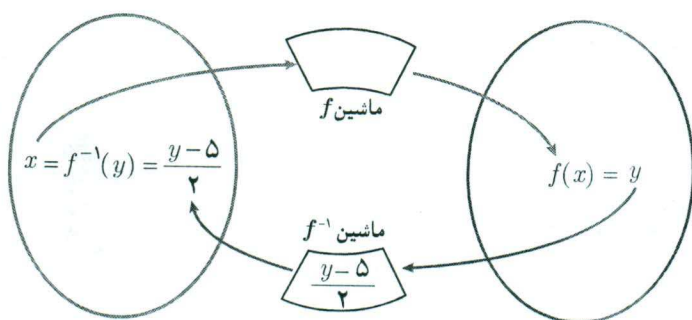
تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم.
 $f(x) = 2x + 5$

الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.

چون هر دو نقطه آن را از یک نقطه قطع می‌کنند، هر کج
 برد دقیقاً یک کجوار دارند و خطی است



ب) نمودار روبه‌رو را توضیح دهید:
 $(3, 11) \in f$ و $(11, 3) \in f^{-1}$
 به عبارت دیگر $f(3) = 11$ و $f^{-1}(11) = 3$



پ) در حالت کلی برای هر عنصر $x \in D_f$ ،
 نمودار مقابل را مانند ب کامل کنید.

ت) بنابراین می‌توان نوشت:

$$f(x) = 2x + 5 \quad (x \in D_f)$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2} \quad (y \in R_f)$$

f^{-1} را به صورت‌های دیگری هم می‌توانیم نمایش دهیم. یک نمایش دیگر را بنویسید:

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(y) = \frac{y-5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(t) = \frac{t-5}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(h) = \frac{h-5}{2} \end{cases}$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه f^{-1} همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای f^{-1} به صورت زیر است:

$$\begin{cases} f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2} \end{cases}$$

برای به دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع یک به یک مانند f ، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را بر حسب y محاسبه می کنیم، سپس با تبدیل y به x ، $f^{-1}(x)$ را به دست می آوریم.

$$f(x) = 2x + 5 \Rightarrow y = 2x + 5$$

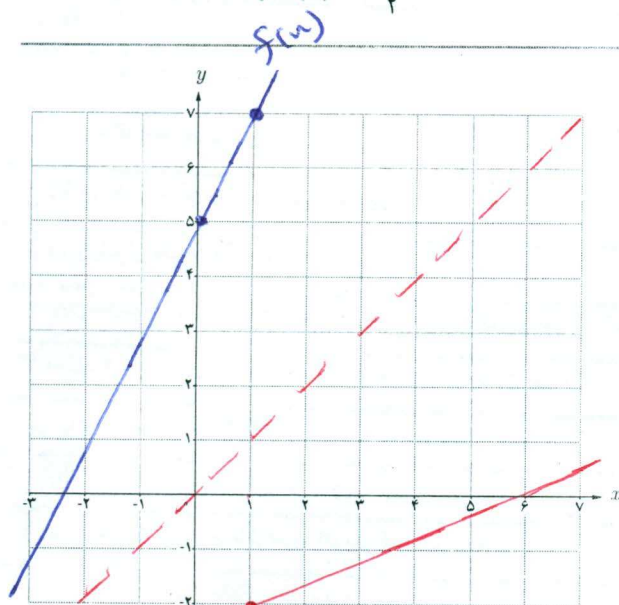
$$\Rightarrow 2x = y - 5$$

$$\Rightarrow x = \frac{y - 5}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(y) = \frac{y - 5}{2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$$

کارد کلاس



با توجه به فعالیت قبل اگر داشته باشیم $f(x) = 2x + 5$ نمودار f و f^{-1} را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

$$f(x) = 2x + 5$$

$$y = 2x + 5$$

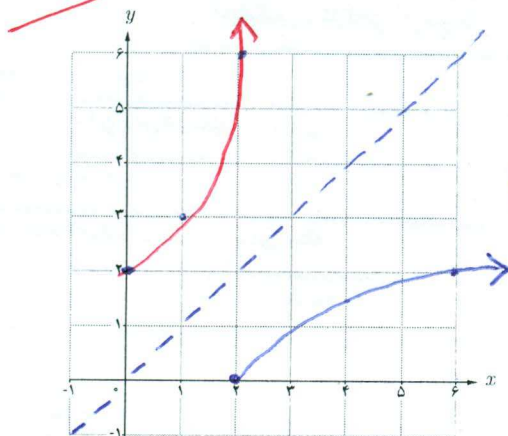
$$y - 5 = 2x$$

$$x = \frac{y - 5}{2}$$

$$f^{-1}(y) = \frac{y - 5}{2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$$

$$y = \frac{x - 5}{2}$$



اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x - 2}$ ، دامنه و برد f را $D_f = [2, \infty)$ و $R_f = [0, \infty)$ به دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

در معادله $y = \sqrt{x - 2}$ ضابطه f^{-1} را بنویسید. نمودار f^{-1} را رسم و دامنه و برد f^{-1} را معلوم کنید.

$$y = \sqrt{x - 2}$$

$$y^2 = x - 2$$

$$y^2 + 2 = x \Rightarrow f^{-1}(y) = y^2 + 2$$

$$f^{-1}(x) = x^2 + 2$$

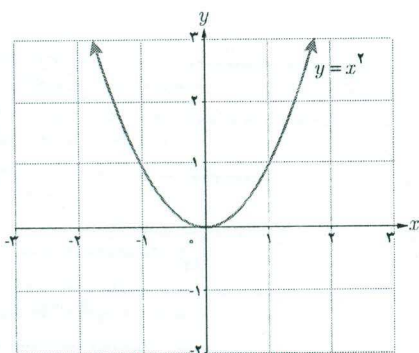
اگر f یک تابع یک به یک باشد، برای به دست آوردن نمودار تابع f^{-1} کافی است قرینه f را نسبت به خط $y = x$ (نیمساز

ربع اول و سوم) به دست آوریم.

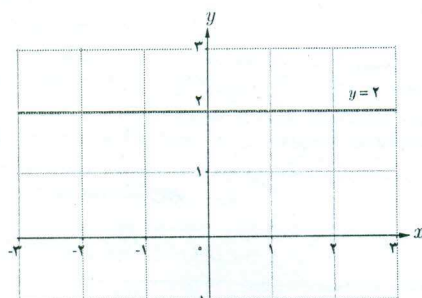
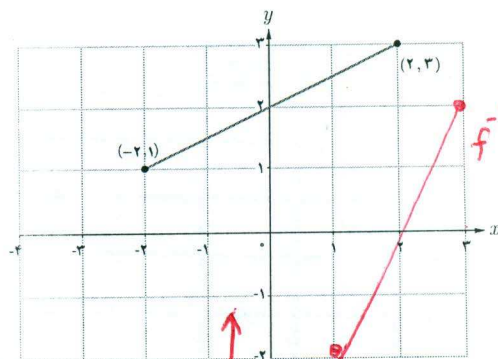
$$D_{f^{-1}} = [0, \infty)$$

$$R_{f^{-1}} = [2, \infty)$$

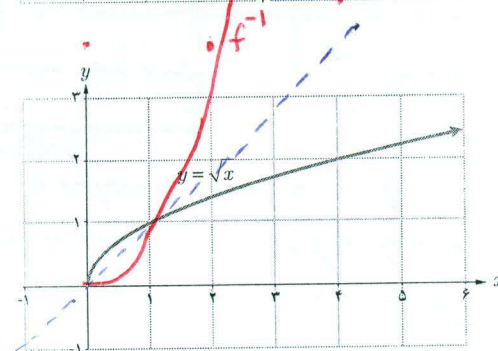
نمودار «تابع وارون» هر کدام از تابع های زیر را که یک به یک است در همان دستگاه مختصات رسم کنید.



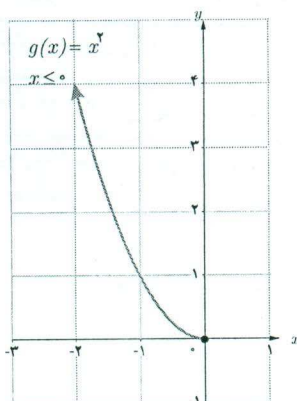
وارون پذیر نیست



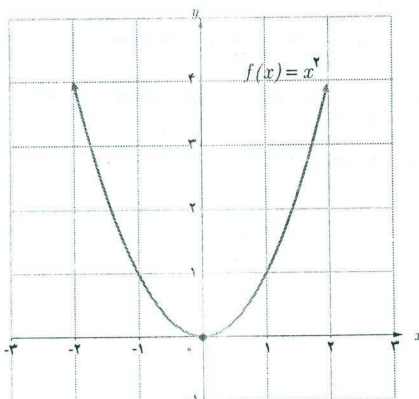
وارون پذیر نیست



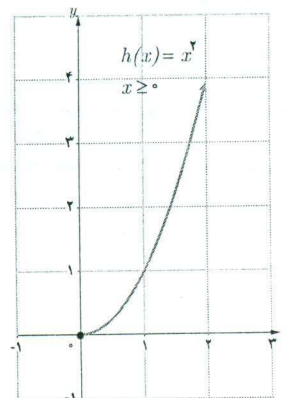
اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می توان تابعی یک به یک به دست آورد. به طور مثال تابع $f(x) = x^2$ یک به یک نیست، ولی با محدود کردن تابع به بازه $[0, \infty)$ و یا $(-\infty, 0]$ تابعی یک به یک به دست می آید.



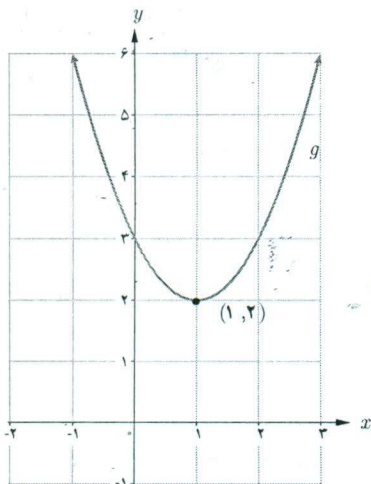
g یک به یک و وارون پذیر است.



f یک به یک نیست، وارون پذیر هم نیست.



h یک به یک و وارون پذیر است.



❖ مثال: نمودار تابع $g(x) = x^2 - 2x + 3$ نشان می‌دهد که این تابع یک به یک نیست. به طور مثال $g(0) = g(2)$. می‌توان دامنه این تابع را محدود کرد و تابعی یک به یک به دست آورد و سپس وارون آن را حساب کرد.
در مورد تابع g داریم:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad D_g = \mathbb{R} \text{ و } R_g = [2, +\infty)$$

$$g(x) = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$$

دامنه f را به بازه $[1, +\infty)$ محدود می‌کنیم و تابع جدید را f می‌نامیم.
بنابراین تابع جدید به صورت زیر خواهد بود که تابع یک به یک و وارون پذیر است.

$$\begin{cases} f: [1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f(x) = (x-1)^2 + 2 \end{cases} \quad D_f = [1, +\infty) \text{ , } R_f = [2, +\infty)$$

اکنون سعی می‌کنیم x را بر حسب y به دست آوریم:

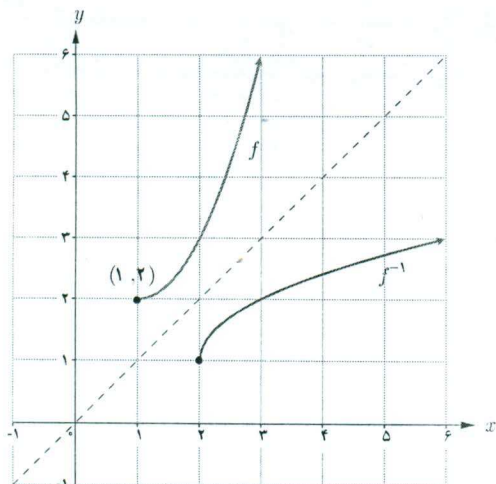
$$y = (x-1)^2 + 2 \Rightarrow y - 2 = (x-1)^2 \Rightarrow (x-1)^2 = y - 2 \Rightarrow x - 1 = \pm \sqrt{y - 2}$$

جواب منفی قابل قبول نیست (چرا؟) بنابراین:

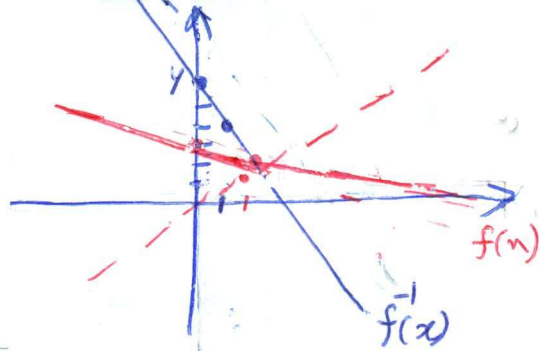
$$x - 1 = \sqrt{y - 2} \Rightarrow x = \sqrt{y - 2} + 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2} + 1$$

در حقیقت داریم:

$$\begin{cases} f^{-1}: [2, \infty) \rightarrow \mathbb{R} \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x - 2} + 1 \end{cases} \quad D_{f^{-1}} = [2, +\infty) \quad R_{f^{-1}} = [1, +\infty)$$



نمودار f و f^{-1} در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند.



مقاله برگزیده از ف. ر. ف.

[۲]

۶۲

تمرین

۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک به یک نباشد. ارتباط بین علم و شادمانی تمام شادمانی که می بینیم علمی است.

۲ آیا تابع $f(x) = \frac{2}{5}$ وارون تابع $g(x) = \frac{5}{2}$ است؟ خیر چون $f(g(x)) \neq x$ و $g(f(x)) \neq x$

۳ به کمک رسم نمودار وارون پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون پذیرند، به دست آورید:

یاسف هادر معنه بعد

الف) $f(x) = (x+5)^2$, $x \geq -5$

ب) $f(x) = -|x-1| + 1$, $x \geq 2$

پ) $f(x) = (x-3)^2$

ت) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h بر حسب متر) بعد از t ثانیه از رابطه $h(t) = 100 - 5t^2$ به دست می آید.

$D_h = [0, 20]$ و $R_h = [0, 100]$

الف) دامنه و برد h را به دست آورید.

ب) چرا h تابعی یک به یک است؟ چون در ارتفاع از زیر زمان منفی و از دامنه خطی می سوز

پ) تابع وارون h را به دست آورید. $y = 100 - 5x^2 \rightarrow y - 100 = -5x^2 \rightarrow \frac{y-100}{-5} = x^2 \rightarrow x = \pm \sqrt{\frac{100-y}{5}}$

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x، $x < f(x)$.

$f: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$
 $f(x) = x^2 + 1$



۶ وارون تابع $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

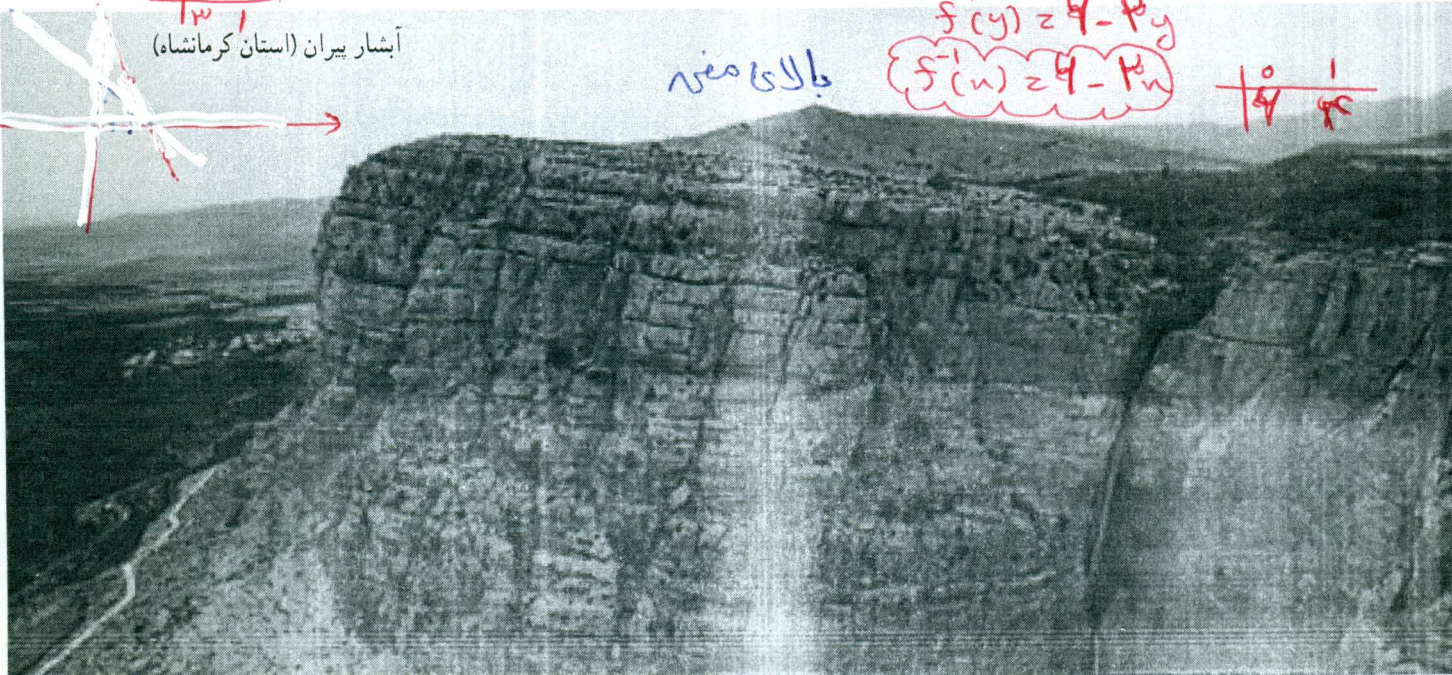
$y = -\frac{1}{2}x + 3 \rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}x \rightarrow \frac{y-3}{-1/2} = x \rightarrow x = 4 - 2y$
 $f^{-1}(y) = 4 - 2y$
 $f^{-1}(x) = 4 - 2x$

آبشار بیران (استان کرمانشاه)

بالای معنه

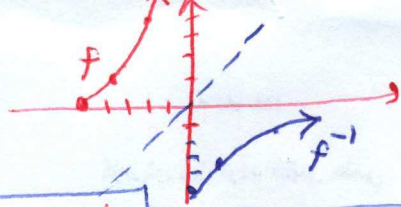
$f^{-1}(y) = 4 - 2y$
 $f^{-1}(x) = 4 - 2x$

$\frac{1}{-1/2} = -2$



الف) $f(x) = (x+5)^2$

$$\begin{array}{ccc|c} -5 & -4 & -3 & \\ \hline 0 & 1 & 4 & \end{array}$$



$$y = (x+5)^2$$

$$y^2 = x+5$$

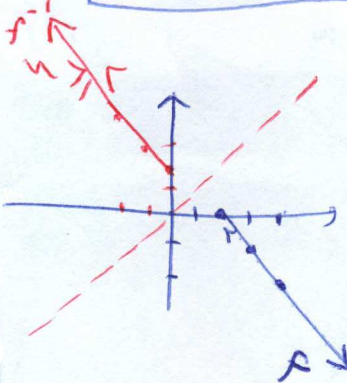
$$y^2 - 5 = x$$

$$f^{-1}(y) = y^2 - 5$$

$$f^{-1}(x) = x^2 - 5$$

ب) $f(x) = -|x-1| + 1$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & \\ \hline 0 & -1 & -2 & \end{array}$$



$$y = -|x-1| + 1$$

$$y-1 = -|x-1|$$

$$1-y = |x-1|$$

$$1-y = x-1$$

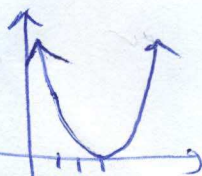
$$2-y = x$$

$$f^{-1}(y) = 2-y$$

$$f^{-1}(x) = 2-x$$

ج) $f(x) = (x-3)^2$

این تابع وارون پذیر نمی باشد
چون یک به یک نیست

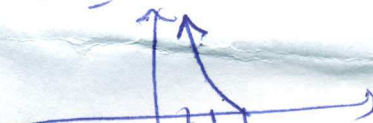


این نمودار وارون پذیر نمی باشد زیرا با یک خط عمودی



تقریباً f روی $[3, \infty)$

وارون پذیر



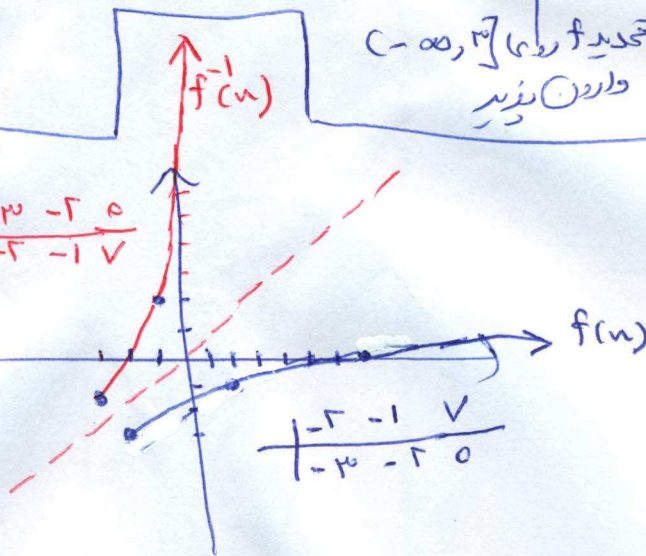
تقریباً f روی $(-\infty, 3]$

وارون پذیر

د) $f(x) = \sqrt{x+2} - 3$

$$\begin{array}{ccc|c} -3 & -2 & -1 & \\ \hline -5 & -4 & -3 & \end{array}$$

این تابع یک به یک وارون پذیر
است



$$y = \sqrt{x+2} - 3$$

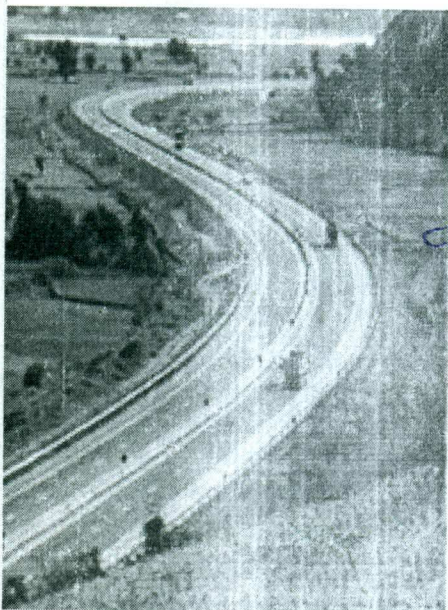
$$y+3 = \sqrt{x+2} \rightarrow (y+3)^2 = x+2 \quad x = (y+3)^2 - 2$$

$$f^{-1}(y) = (y+3)^2 - 2$$

$$f^{-1}(x) = (x+3)^2 - 2$$

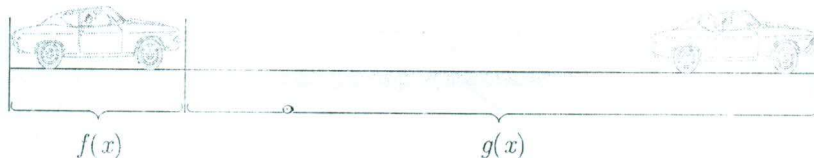
همان گونه که عمل های جمع و ضرب در مورد دو عدد یا دو چند جمله ای انجام پذیر است، برای دو تابع نیز چنین اعمالی قابل انجام است. در فعالیت زیر مثالی واقعی از این موضوع بررسی می شود.

فاصله زمانی لحظه ای که راننده با یک مانع روبرو می شود تا لحظه فشار دادن پدال ترمز را «زمان عکس العمل» می نامند.



فرض کنید اتومبیلی با سرعت ثابت در بزرگراهی در حال حرکت است. اگر اتومبیل با سرعت x کیلومتر بر ساعت حرکت کند، مسافتی که در «زمان عکس العمل» طی می کند از تابع $f(x) = \frac{1}{10}x$ به دست می آید که در آن مقدار تابع بر حسب متر است. همچنین مسافتی که اتومبیل پس از فشار دادن پدال ترمز تا توقف کامل طی می کند از تابع $g(x) = \frac{1}{100}x^2$ به دست می آید که در آن مقدار تابع بر حسب متر است و x سرعت اتومبیل بر حسب کیلومتر بر ساعت است.

الف) اگر اتومبیلی با سرعت ۱۰۰ کیلومتر بر ساعت حرکت کند، پس از دیدن مانع، تا توقف کامل چه مسافتی طی می شود؟
 ب) اگر سرعت اتومبیل x کیلومتر بر ساعت باشد، تابعی بنویسید که مسافت طی شده توسط اتومبیل پس از رؤیت مانع توسط راننده و ترمز کردن را نمایش دهد. این تابع را با $h(x)$ نمایش دهید.



مجموع فاصله طی شده در طول زمان عکس العمل و فاصله طی شده پس از ترمز کردن را «فاصله دید توقف» می نامند. این فاصله در طراحی جاده ها و بزرگراه ها کاربرد دارد.

پ) اگر این اتومبیل پس از پیمودن ۶۰ متر متوقف شود، با چه سرعتی در حال حرکت بوده است؟

$$40 = \frac{1}{10}x + \frac{1}{100}x^2$$

$$4000 = 10x + x^2 \rightarrow x^2 + 10x - 4000 = 0$$

۱- برای تعیین فاصله دید توقف، فاصله عکس العمل ترمز مبتنی بر زمان ۲/۵ ثانیه و شتاب ۲۷۲ متر بر مجذور ثانیه مورد استفاده قرار می گیرد.

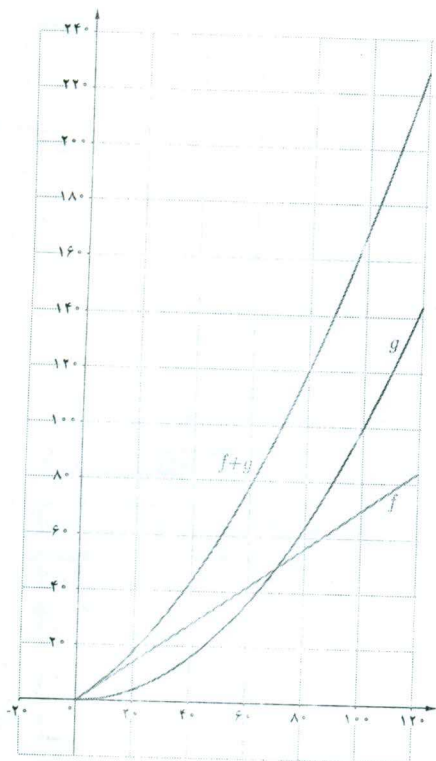
$$\Delta = 4900 + 40000 = 44900$$

$$x_1 = \frac{-10 + \sqrt{44900}}{2} \approx \frac{-10 + 212}{2} \approx 101 \text{ m/s}$$

$$x_2 = \frac{-10 - \sqrt{44900}}{2} \approx \frac{-10 - 212}{2} \approx -111 \text{ m/s}$$

اگر f و g دو تابع باشند، $f+g$ تابعی است که دامنه آن مجموعه $D_f \cap D_g$ است و به صورت زیر تعریف می شود:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad x \in D_f \cap D_g$$



در فعالیت قبل دامنه f و دامنه g در حالت کلی مجموعه $\mathbb{R}$ است. ولی در این مسئله واقعی دامنه تابع مجموعه ای مانند $[0, 12]$ است. بنابراین دامنه $f+g$ نیز چنین است. نمودارهای سه تابع f ، g و $f+g$ ، فعالیت قبل، در شکل روبه رو رسم شده است. رابطه بین این توابع را به کمک نمودار آنها توضیح دهید.

کاردرکلاس

$$(f+g)(x) = x + 2 + \sqrt{x-1}$$

$$D_{f+g} = \mathbb{R} \cap [1, \infty) = [1, \infty)$$

$f+g$

اگر $f(x) = x + 2$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ ، $f+g$ را محاسبه کنید. دامنه تابع $f+g$ را به دست آورید.

اگر $f = \{(1, 2), (-2, 5), (0, 7)\}$ و $g = \{(1, 5), (2, 4), (0, -1)\}$

ابتدا دامنه $f+g$ را به دست آورید و سپس $f+g$ را به صورت مجموعه ای از زوج های مرتب نمایش دهید.

$$D_{f+g} = \{0, 1\} \quad f+g = \{(0, 4), (1, 7)\}$$

به طور کلی اگر f و g دو تابع باشند توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f \cdot g$ و $\frac{f}{g}$ به صورت زیر تعریف می شوند:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

$$D_{f \cdot g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\}$$

❖ مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+2}$ و $g(x) = \sqrt{3-x}$ و $h(x) = \frac{x+2}{2x+1}$ توابع $f+g$ ، $g-h$ ، gh و $\frac{f}{g}$ را محاسبه کنید و دامنه آنها را به دست آورید. کدام یک از مقادیر $(f+g)(2)$ و $(f+g)(5)$ وجود دارند؟

❖ حل: ابتدا دامنه هریک از توابع را به دست می آوریم:

$$D_h = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$$

$$D_g = (-\infty, 3]$$

$$D_f = [-2, \infty)$$

$(f+g)(2) = 3$ ولی $(f+g)(5)$ وجود ندارد.

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-2, 3]$$

$$(g \cdot h)(x) = g(x)h(x) = (\sqrt{3-x})\left(\frac{x+2}{2x+1}\right)$$

$$D_{g \cdot h} = D_g \cap D_h = (-\infty, 3]$$

$$(g-h)(x) = g(x) - h(x) = \sqrt{3-x} - \frac{x+2}{2x+1}$$

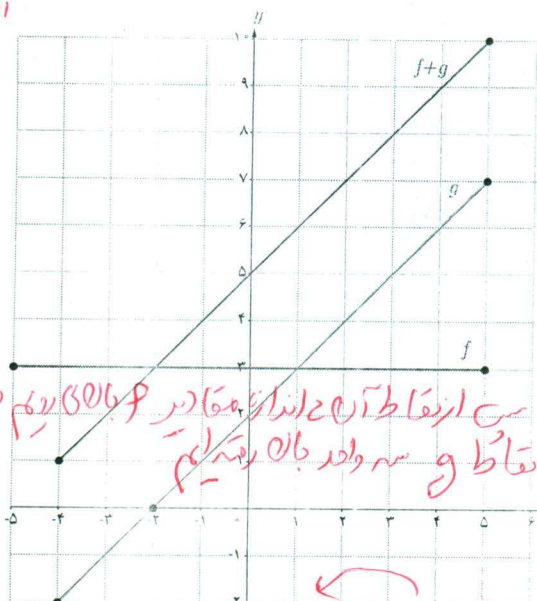
$$D_{g-h} = D_g \cap D_h = (-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, 3]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$$

$$D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = 0\} = [-2, 3] - \{3\}$$



۲، ۳
 $(0, -1)$ $m_2 = \frac{1-0}{0-(-1)} = -1$
 $(-2, 0)$
 x_1, y_1



فصلت
 $D_f = [-2, \infty)$ $f(x) = \sqrt{x+2}$
 $D_g = (-\infty, 3]$ $g(x) = \sqrt{3-x}$

- در شکل رویه‌رو نمودارهای دو تابع f و g داده شده‌اند.

الف) دامنه f و دامنه g و ضابطه‌های f و g را بنویسید.

ب) دامنه و ضابطه توابع $f+g$ ، $f-g$ ، fg و $\frac{f}{g}$ را به دست آورید.

پ) نمودار $f+g$ در شکل رسم شده است. توضیح دهید چگونه این نمودار را رسم کرده‌ایم. ابتدا نام f و g را رسم کردیم. تب نقاط f و g را رسم کردیم و این نقاط را به هم وصل کردیم.

ت) توضیح دهید بقیه نمودارهای توابع داده شده در قسمت (ب) را چگونه می‌توان رسم کرد.

$f(x) + g(x) = \sqrt{x+2} + \sqrt{3-x}$
 $f(x) - g(x) = \sqrt{x+2} - \sqrt{3-x}$
 $f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x+2} \cdot \sqrt{3-x}$
 $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{3-x}}$

$D_{f+g} = [-2, 3]$ $D_f \cap D_g = [-2, 3]$

$D_{f-g} = [-2, 3]$

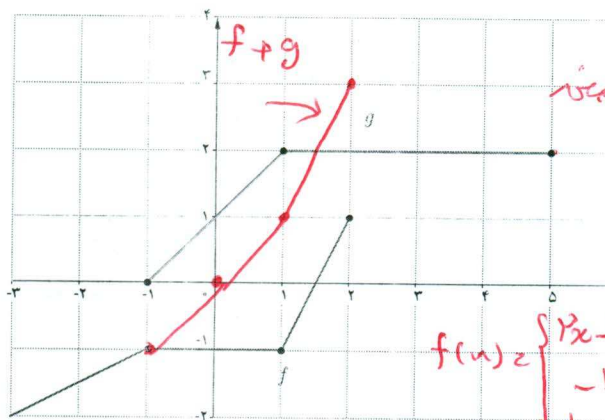
$D_{fg} = [-2, 3]$

$D_{\frac{f}{g}} = [-2, 3] - \{3\}$

$(D_f \cap D_g) - \{x \mid g(x) = 0\}$

$$(f+g)(1) = f(1) + g(1) = -1 + 2 = 1$$

$$(f+g)(-1) = f(-1) + g(-1) = -1 + 0 = -1$$



نمودارهای توابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر $(f+g)(1)$ و $(f+g)(-1)$ را به دست آورید. **بالا می‌آید**

ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را

در همین شکل رسم کنید.

پ) ضابطه توابع f و g را به دست آورید.

ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطه آن رسم کنید و با

ب) مقایسه کنید.

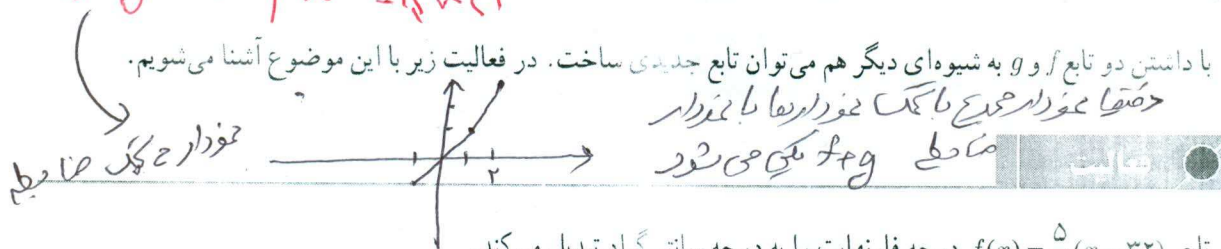
$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & 1 \leq x \leq 2 \\ -1 & -1 \leq x < 1 \\ \frac{1}{x} - \frac{1}{x} & \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 2 & x > 1 \\ x+1 & -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

ترکیب توابع

$$(f+g)(x) = \begin{cases} 2x-1 & 1 \leq x \leq 2 \\ x & -1 \leq x < 1 \end{cases}$$

با داشتن دو تابع f و g به شیوه‌ای دیگر هم می‌توان تابع جدیدی ساخت. در فعالیت زیر با این موضوع آشنا می‌شویم.



تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند.

الف) $f(32) = 0$ به چه معنی است؟ 50° درجه فارنهایت چند درجه سانتی‌گراد است؟ $f(50) = \frac{5}{9}(50 - 32) = 10^\circ$

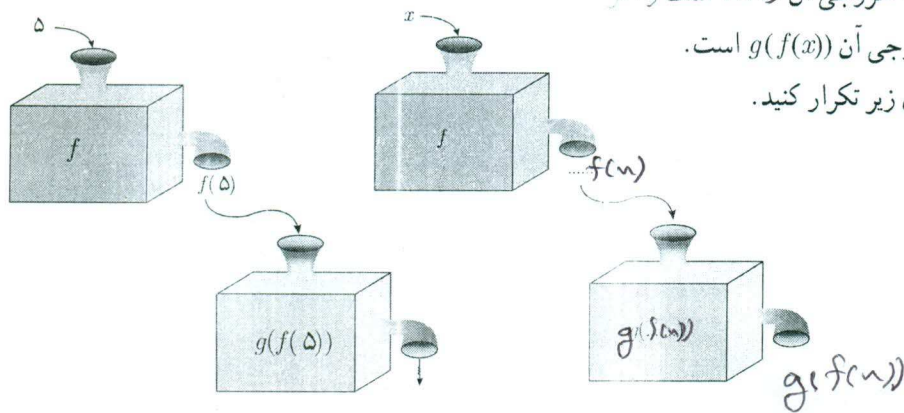
ب) تابع $g(x) = x + 273$ درجه سانتی‌گراد را به درجه کلون تبدیل می‌کند. $g(0) = 273$ به چه معنی است؟ 273 درجه سانتی‌گراد

پ) مطابق نمودارهای داده شده می‌توانیم f و g را همانند دو ماشین در نظر بگیریم. یکی از ماشین‌ها فارنهایت را به سانتی‌گراد و

دیگری سانتی‌گراد را به کلون تبدیل می‌کند. به کمک نمودارها نشان دهید که 5 درجه فارنهایت معادل چند درجه کلون است؟

$$f(5) = -10^\circ$$

$$g(f(5)) = g(-10^\circ)$$

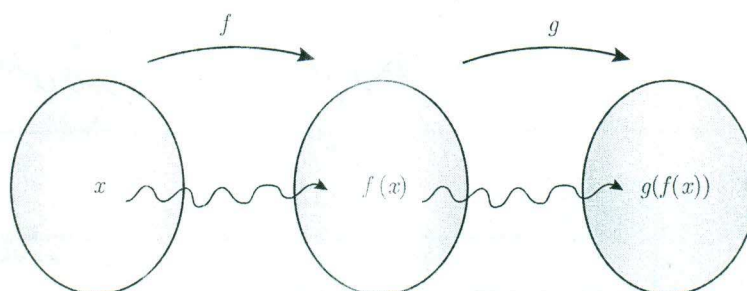


ت) اگر x ورودی تابع f باشد، خروجی آن $f(x)$ است و اگر

ورودی تابع g ، $f(x)$ باشد خروجی آن $g(f(x))$ است.

ث) را با تکمیل نمودارهای زیر تکرار کنید.

نمودارهای صفحه قبل را به صورت زیر هم می توان نمایش داد :



اما $g(f(x))$ را چگونه می توان محاسبه کرد؟ داریم :

$$g(f(x)) = g\left(\frac{5}{9}(x - 32)\right)$$

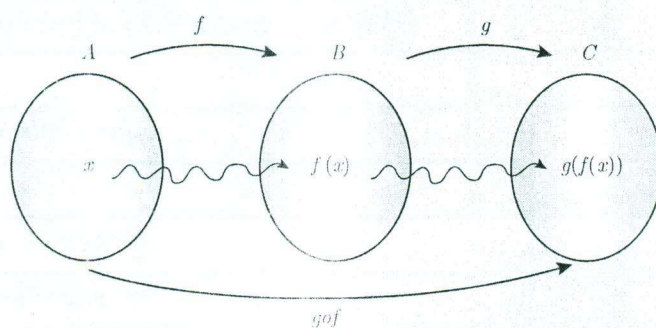
و می دانیم تابع g به هر ورودی ۲۷۳ واحد اضافه می کند. پس :

$$g(f(x)) = \frac{5}{9}(x - 32) + 273$$

این یک تابع جدید است که درجه فارنهایت را به کلین تبدیل می کند و به دلیل شیوه محاسبه آن با gof (بخوانید جی او اف) نمایش داده می شود. در حقیقت gof نیز همانند ماشینی عمل می کند که ورودی x را به $g(f(x))$ تبدیل می کند.

اگر f و g دو تابع باشند ترکیب g با f را با gof نمایش می دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می کنیم : به شرط آنکه مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند :

$$(gof)(x) = g(f(x))$$



به عبارت دیگر اگر $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$ آن گاه :

$$gof: A \rightarrow C$$

$$(gof)(x) = g(f(x))$$

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

به طور مشابه ترکیب f با g یعنی fog را می توان تعریف کرد.

$$D_f = \mathbb{R} \quad D_g = \mathbb{R}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x+3 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+1 \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

۶۸

$$g \circ f(x) = 2(x^2+1) + 3 = 2x^2 + 5$$

$$f \circ g(x) = (2x+3)^2 + 1 = 4x^2 + 12x + 10$$

$$g(x) = 2x+3 \text{ و } f(x) = x^2+1 \text{ اگر}$$

الف) دامنه و ضابطه تابع های $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

ب) آیا تابع های $f \circ g$ و $g \circ f$ مساوی اند؟ خیر چون $f(x) \neq g(x)$ و $D_f \neq D_g$

❖ مثال: اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = x^2+3$ ، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید.

حل: داریم،

$$D_g = \mathbb{R} \text{ و } D_f = [1, \infty)$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{x^2+3-1} = \sqrt{x^2+2}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [1, \infty)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+3 \geq 1\} = \{x \mid x^2 \geq -2\} = \mathbb{R}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \in [1, \infty) \mid \sqrt{x-1} \in \mathbb{R}\} = [1, \infty)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x-1})^2 + 3$$

توجه کنید که $g \circ f$ برای اعداد کمتر از ۱ تعریف نشده است. به طور مثال $(g \circ f)(\frac{1}{2})$ یا $(g \circ f)(0)$ معنی ندارد. با این شرط $(g \circ f)(x)$ را به صورت زیر هم می توان نمایش داد:

$$(g \circ f)(x) = x - 1 + 3$$

$$(g \circ f)(x) = x + 2 \quad x \in [1, \infty)$$

کار در کلاس

اگر $f = \{(11, 7), (-2, 4), (3, -5), (2, -5)\}$ و $g = \{(2, 11), (4, -2), (6, 3), (3, 2)\}$ ابتدا $D_{f \circ g}$ و سپس توابع

$$D_{f \circ g} = \{2, 4, 6, 3\} \quad f \circ g(x) = f(g(x)) = f(11, 7) = (4, -2) = (6, 3) = (3, 2)$$

$$D_{g \circ f} = \{7, -5\} \quad g \circ f(x) = g(f(x)) = g(-2, 4) = (6, 3)$$

$$\frac{f}{g}(u) = \frac{5u}{2-u} \quad (D_f \cap D_g) \setminus \{u \mid g(u) = 0\} = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

(1)

$$(f-g)(u) = 5u - (2-u) = 6u - 2 \quad D_{f-g} = D_f \cap D_g = \mathbb{R}$$

$$f \circ g(u) = 5(2-u) = 10 - 5u \quad D_{f \circ g} = \{u \in D_g \mid g(u) \in D_f\} = \{u \in \mathbb{R} \mid 2-u \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$$

فصل دوم: تابع ۶۹

$$f \circ g(u) = \frac{1}{\frac{5}{u} - 3} = \frac{1}{\frac{5-3u}{u}} = \frac{u}{5-3u} \quad D_{f \circ g} = \{u \in D_g \mid g(u) \in D_f\} = \{u \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \mid \frac{5}{u} \in \mathbb{R} \setminus \{3\}\} = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{5}{3}\}$$

۱ اگر $f(x) = 4x$ و $g(x) = 2-x$ ، توابع $\frac{f}{g}$ ، $f-g$ و $f \circ g$ را به همراه دامنه آنها به دست آورید. بالای صحنه

۲ برای دو تابع $f(x) = \frac{1}{x-3}$ و $g(x) = \frac{4}{x}$ تابع $f \circ g$ و دامنه آن را به دست آورید. بالای صحنه

۳ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

$$f \circ g(e) = f(g(e)) = f(v) = \Delta$$

الف) اگر $g(4) = 7$ و $f(7) = 5$ آن گاه $(f \circ g)(4) = 35$ درست

$$\frac{f}{g}(2) = \frac{f(2)}{g(2)} = \frac{4}{4} = 1$$

ب) اگر $f(x) = x+4$ و $g(x) = 3x$ آن گاه $(\frac{f}{g})(2) = 1$ درست

پ) اگر $g(x) = 2x-1$ و $f(x) = \sqrt{x}$ آن گاه $(f \circ g)(5) = g(2)$ درست

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $f \circ g = g \circ f$ نادرست

ث) اگر $f(x) = x^2 - 4$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 4}$ ، آن گاه $(f \circ g)(5) = -25$ و $(f \circ g)(x) = -x^2$ نادرست

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $fg = gf$ درست

۴ فرض کنیم $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ و $f: A \rightarrow \mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود: $f = \{(1,2), (2,3), (3,5), (4,7)\}$ که در آن:

$$(f+g)(u) = \{(1,4), (2,7), (3,11), (4,15)\}$$

$$g(n) = 2n$$

$$g \circ f(u) = \{(1,4), (2,7), (3,11), (4,15)\}$$

توابع $f+g$ و $g \circ f$ را به دست آورید. $A = \{1,2,3,4\}$

۵ اگر $f = \{(-4,13), (-1,7), (0,5), (\frac{5}{3},0), (3,-5)\}$ و $g = \{(-4,-7), (-2,-5), (0,-3), (3,0), (5,2), (9,6)\}$

$$(f+g)(u) = \{(-4,-4), (-2,-2), (3,-5), (5,2)\}$$

$$(f-g)(u) = \{(-4,20), (-1,12), (3,-10), (5,7)\}$$

$$\frac{f}{g}(u) = \{(-4,13), (-1,7), (0,5), (3,-5)\}$$

توابع $f+g$ و $f-g$ را به دست آورید.

۶ اگر $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ و $g(x) = \sqrt{4-x^2}$ ، دامنه و ضابطه توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را به دست آورید. صحنه بعد

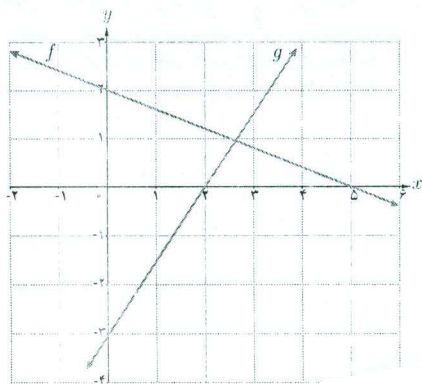
۷ اگر $f(x) = x^2 - 9$ و $g(x) = x+3$ ، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنه آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

دامنه تقسیم قبل از ساده شدن محاسبه می‌شود

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x+3} = x-3, \quad D_{\frac{f}{g}} = \mathbb{R}$$

۸ اگر $f(x) = 2x+5$ ، $f^{-1}(x)$ و $f \circ f^{-1}$ را به دست آورید.

۹ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطه $f+g$ ، $f-g$ و fg را محاسبه کنید.



$$D_f = \mathbb{R} \quad \sqrt{1-x^2} \geq 0 \quad D_g = [-1, 1]$$

(4)

$$f \circ g(x) = \sqrt{(\sqrt{1-x^2})^2 + 1} = \sqrt{2-x^2}$$

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g \in D_f\} = \{x \in [-1, 1] \mid \sqrt{1-x^2} \in \mathbb{R}\} = [-1, 1]$$

$$g \circ f(x) = \sqrt{1 - (\sqrt{x^2 + 1})^2} = \sqrt{1 - x^2 - 1} = \sqrt{-x^2}$$

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f \in D_g\} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{x^2 + 1} \in [-1, 1]\} = \emptyset$$

$$\sqrt{1-x^2} \geq 0 \implies 1-x^2 \geq 0 \iff -1 \leq x \leq 1$$

$$f(x) = x + \Delta$$

$$y = x + \Delta \implies y - \Delta = x$$

$$x = \frac{y - \Delta}{1} \quad f^{-1}(y) = \frac{y - \Delta}{1}$$

(1)

$$f \circ f^{-1} = 1 \left(\frac{y - \Delta}{1} \right) + \Delta = y - \Delta + \Delta = y$$

$$f^{-1} \circ f = \frac{(x + \Delta) - \Delta}{1} = x$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_1, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_2 \quad m = \frac{1}{\Delta}$$

$$y - 1 = \frac{1}{\Delta} x$$

$$y = \frac{1}{\Delta} x + 1$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} x_1, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} x_2 \quad m = \frac{1}{-1} = -1$$

$$y = \frac{1}{-1} (x - 1)$$

$$y = \frac{1}{-1} x + 1$$

galo

$$(f+g)(x) = -\frac{1}{\Delta} x + 1 + \frac{1}{-1} x + 1 = \frac{11}{10} x - 1$$

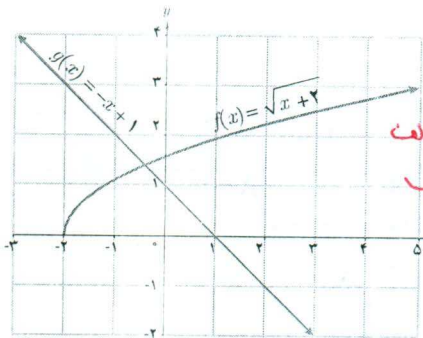
$$(f-g)(x) = \frac{1}{\Delta} x + 1 - \frac{1}{-1} x + 1 = \frac{11}{10} x + 2$$

$$(f \times g)(x) = \left(-\frac{1}{\Delta} x + 1 \right) \left(\frac{1}{-1} x + 1 \right)$$

$$y = ax + b \quad \frac{y-b}{a} = x \quad f^{-1}(u) = \frac{u-b}{a} = \frac{1}{a}u - \frac{b}{a} \quad -11$$

۷۰

۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هر کدام از عبارت‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.



الف) $(f+g)(2)$ ب) $(f+g)(-3)$ پ) $(fg)(\frac{1}{2})$

ت) $(fog)(-4)$ ث) $(\frac{f}{g})(0)$ ج) $(gof)(-1)$

۱) $f(2) + g(2) = 2 + 1 = 3$

۲) $f(-3) + g(-3) =$

۳) $f(\frac{1}{2}) \times g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{5}{2}}$

۴) $f(g(-4)) = f(0) = 1$

۵) $\frac{f(0)}{g(0)} = \frac{1}{0}$

۶) $g(f(-1)) = g(2) = 2$

تک‌نقطه‌ای و یکتا

۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به صورت $y = ax + b$ ($a \neq 0$) باز هم یک تابع خطی است. **بالای صند**

۱۲ تابع $f(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی‌گراد را به

$\frac{9}{5}F = x - 32 \Rightarrow x = \frac{9}{5}F + 32$
 $g(x) = \frac{9}{5}x + 32$

عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد. **۱۳** در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پر فروش در حوزه خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید:

یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است.

کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به چاپ رسیده است.

الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هر یک از این دو کتاب را بر حسب شماره چاپ نمایش دهند.

صند زیر

ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شده هر دو کتاب را نمایش دهد.

ت) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.



$$f(n) = \begin{cases} 10000 & n \leq 1 \\ 1000 & n > 1 \end{cases} \quad g(n) = \begin{cases} 10000 & n \leq 1 \\ 9000 & n > 1 \end{cases}$$

$$f(n) + g(n) = \begin{cases} 20000 & n \leq 1 \\ 14000 & n > 1 \end{cases}$$

